# MÉMOIRE

## *Sur l'égalité des polyèdres composés des mêmes faces semblablement disposées;*

Par M. Cauchy, Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

L'auteur commence par établir, sur les polygones convexes rectilignes et sphériques, les théorèmes suivans :

1°. Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique, dont tous les côtés, à l'exception d'un seul, sont supposés invariables, on fait croître ou décroître simultanément les angles compris entre les côtés invariables, le côté variable croîtra dans le premier cas, et décroîtra dans le second.

2°. Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique, dont les côtés sont invariables, on fait croître les angles, ceux-ci ne pourront tous varier dans le même sens, soit en plus, soit en moins.

3°. Si, dans un polygone convexe rectiligne ou sphérique, dont les côtés sont invariables, on fait varier tous les angles, et que, passant ensuite en revue ces mêmes angles, on les classe en différentes séries, en plaçant dans une même série tous les angles qui, pris consécutivement, varient dans le même sens; les séries composées d'angles qui varieront en plus, seront toujours en même nombre que les séries composées d'angles qui varieront en moins; et par suite le nombre total des séries sera pair.



4°. Les mêmes choses étant posées que dans le théorème précédent, le nombre des séries sera toujours au moins égal à quatre.

5°. Les mêmes choses étant posées que dans les deux théorèmes précédens, on trouvera toujours dans le polygone au moins quatre côtés, dont chacun sera adjacent à deux angles, qui varieront en sens contraire.

Un angle solide quelconque, pouvant être représenté par le polygone sphérique que l'on obtient en coupant cet angle solide par une sphère décrite de son sommet comme centre avec un rayon arbitraire, on voit qu'il suffit de substituer dans les théorèmes précédens les noms d'angles solides, d'angles plans et d'inclinaisons sur les arêtes, à ceux de polygones sphériques de côtés et d'angles, pour obtenir autant de théorèmes sur les angles solides. Le dernier peut s'énoncer de la manière suivante.

6°. Si, dans un angle solide dont les angles plans sont invariables, on fait varier les inclinaisons sur les différentes arêtes, on trouvera toujours au moins quatre angles plans, dont chacun sera compris entre deux arêtes, sur lesquelles les inclinaisons varieront en sens contraire.

A l'aide de ce dernier théorème et de celui d'Euler, M. Cauchy démontre, comme il suit, la préposition d'Euclide, qu'il énonce ainsi ;

Dans un polyèdre convexe, dont toutes les faces sont invariables, les angles compris entre les faces, ou, ce qui revient au même, les inclinaisons sur les différentes arêtes sont aussi invariables ; en sorte qu'avec les mêmes faces on ne peut construire qu'un second polyèdre convexe symétrique du premier.

*Démonstration.* En effet, supposons, contre l'énoncé ci-dessus, que l'on puisse faire varier les inclinaisons des faces adjacentes sans détruire le polyèdre; et, pour simplifier encore la question, supposons d'abord que l'on puisse faire varier toutes les inclinaisons à la fois, les inclinaisons sur certaines arêtes varieront en plus, les inclinaisons sur d'autres arêtes varieront en moins; et, parmi les angles plans qui composent les faces et les angles solides du polyèdre, il s'en trouvera nécessairement plusieurs qui seront compris chacun entre deux arêtes, sur lesquelles les inclinaisons varieront en sens contraire. C'est le nombre de ces angles plans qu'il s'agit de déterminer.

Soient $S$ le nombre des angles solides du polyèdre,

$H$ le nombre de ses faces,

$A$ le nombre de ses arêtes.

On aura, par le théorème d'Euler, $S+H=A+2$, ou $A-H=S-2$.

Soient de plus, $a$ le nombre des triangles, $b$ le nombre des quadrilatères, $c$ celui des pentagones, $d$ celui des hexagones, $e$ celui des heptagones, etc...., qui composent la surface du polyèdre. On aura :

$$H=a+b+c+d+e+\text{, etc.}$$

$$2A=3a+4b+5c+6d+7e+\text{, etc.}$$

et par suite, $$4(A-H)=2a+4b+6c+8d+10e+\text{, etc....}$$

Cela posé, si l'on considère les angles plans compris dans la surface du polyèdre, comme formant par leur réunion les angles solides, on trouvera que chacun des angles solides, en vertu du théorème 6, doit fournir au moins quatre angles plans, dont chacun soit compris entre deux arêtes, sur lesquelles les inclinaisons varient en sens contraire. La surface totale du polyèdre devra donc fournir un nombre d'angles plans de cette espèce au moins égal à $4S$. Reste à savoir si cela est possible.



Or, si l'on considère les angles plans comme composant les faces du polyèdre, on trouvera que les faces triangulaires, contenant toujours au moins deux arêtes, sur lesquelles les variations d'inclinaison sont de même signe, fourniront au plus chacun deux angles plans qui satisferont à la condition donnée. Les quadrilatères pourront fournir chacun quatre de ces angles plans; mais les pentagones, se trouvant dans le même cas que les triangles, n'en fourniront chacun que quatre au plus, comme les quadrilatères. En continuant de même, on ferait voir que les hexagones et les heptagones ne pourront fournir chacun plus de six angles plans de cette espèce; que les octogones et les ennéagones n'en pourront fournir chacun plus de huit, et ainsi de suite. Il suit de là que toutes les faces du polyèdre réunies ne pourront fournir ensemble plus de ces angles plans, qu'il n'y a d'unités dans la somme faite de trois fois le nombre des triangles, de quatre fois celui des quadrilatères, de quatre fois celui des pentagones, de six fois celui des hexagones, etc...., ou dans

$$2a+4b+4c+6d+6e+\text{, etc....}$$

Mais si l'on compare ce résultat à la valeur de $4(A-H)$, trouvée plus haut, il sera facile de voir que la somme dont il s'agit ici est plus petite que $4(A-H)$, ou $4(S-2)$, ou encore $4(S-8)$. Il est donc impossible que le polyèdre total fournisse un nombre au moins égal à $4S$ d'angles qui satisfassent à la condition donnée. On ne peut donc changer à la fois les inclinaisons sur toutes les arêtes.

Si l'on suppose en second lieu que, sans changer les faces du polyèdre, on puisse faire varier les inclinaisons sur les différentes arêtes, à l'exception des inclinaisons sur les arêtes comprises entre plusieurs faces adjacentes et renfermées dans un certain contour ; alors, pour ramener la question au cas précédent, il suffira d'observer que le théorème d'Euler subsistera encore, si l'on considère toutes les faces dont il s'agit comme n'en formant qu'une seule ; et par conséquent, de faire abstraction dans les calculs précédens des arêtes sur lesquelles les inclinaisons ne varient pas, et des sommets où elles se réunissent.

On prouverait de même que l'on ne peut considérer le polyèdre comme composé de plusieurs parties, dont les unes seraient invariables et les autres variables.

Cette démonstration est copiée littéralement dans le Mémoire de M. Cauchy.



# ANNONCES

## CONCERNANT les Mines, les Sciences et les Arts.

## DÉPOT DE ZINC (1),

*Dans lequel on trouve ce métal fondu en plaques et laminé, pour être employé dans les arts en remplacement :*

1°. Du fer battu et du fer-blanc, dont il n'excède pas la dépense et décuple la durée ; dans l'emploi des gouttières, tuyaux de conduite, chêneaux, couvertures de bâtimens, même des plus grands édifices, tel qu'on le pratique en Angleterre.

2°. De l'étain, du plomb et du cuivre pour robinets de fontaine et divers ustensiles, sans craindre aucun des accidens qui résultent de l'emploi de ce dernier.

*Prix du Zinc laminé et employé à l'usage des bâtimens.*

| | fr. | c. |
|---|---|---|
| Zinc en lames. . . . . . . . . | 2 | 60 le kil. |
| Zinc en lames débitées pour être employé. . . . . . . . . | 3 | |
| Zinc pour gouttières (soudure et posage compris), le mètre courant se paie : | | |
| Pour 8 pouces de tour. . . . . | 5 | 50 |
| — 9. . *idem.* . . . . . | 6 | » |
| — 10. . *idem.* . . . . . | 7 | » |
| — 11. . *idem.* . . . . . | 8 | » |
| — 12. . *idem.* . . . . . | 9 | » |

(1) Ce Dépôt est établi rue Thévenot, n°. 17. On est prié d'affranchir les lettres.