doit avoir entre P sur T et P sur M, pour que les faces secondaires puissent avoir lieu.

J'ai observé dernièrement deux cristallisations nouvelles que je crois devoir décrire ici.

La première, que possède le célèbre professeur Jurine, appartient aux modifications trois à trois; je l'appelle chaux sulfatée *perihexaèdre*, son signe est $\begin{array}{ccc} \overset{1}{P} & \overset{3}{E} & \overset{1}{G} \\ P & l & o \end{array}$. C'est un prisme droit comprimé, à six pans; il est assez remarquable d'y voir la base primitive jouer le rôle d'une facette secondaire dans le prisme, tandis que la base secondaire a été formée sur une des arêtes du prisme primitif.

Cette variété provient d'une belle géode trouvée dans les carrières de gypse de Saint-Julien près de Genève; les cristaux sont d'une grandeur moyenne et bien prononcés.

La seconde, que j'ai observée dans ma collection, sert de passage entre la *trapésienne* de M. le professeur Haüy et *l'octodécimale* de mon mémoire; je lui donne le nom de *chaux sulfatée quatuordécimale;* son signe est $\begin{array}{cccc} P & \overset{4}{C} & \overset{2}{C} & \overset{1}{E} \\ P & h & f & l \end{array}$ elle doit être placée avant la dihéxaèdre.

MÉMOIRE

Sur la théorie des Roues à Augets, des Machines à réaction et de celles à Colonne d'eau.

PAR M. ROUSELLE-GALLE, Ingénieur au Corps royal des Mines.

JE me propose, dans ce mémoire, d'examiner d'abord la théorie des roues à augets, exposée dans l'ouvrage intitulé : *Essai sur la science des machines ;* d'appliquer à ces moteurs et aux machines à réaction, le principe général des forces vives; de donner ensuite l'expression de l'effet des machines à colonne d'eau, et d'en déduire la vitesse du piston, en ayant égard à toutes les résistances qui s'opposent au mouvement.

Mais auparavant, je crois devoir prévenir qu'en mettant au jour les inexactitudes qui se sont glissées dans l'*Essai sur la science des machines*, je ne prétends point affaiblir les droits que l'auteur s'est justement acquis à l'estime des savans, et que je n'ai d'autre but que l'utilité de dévoiler des erreurs dont les résultats se sont présentés comme des vérités importantes.

Rappelons, avant tout, la manière dont l'auteur parvient à l'expression générale de l'effet des roues à augets.

Il suppose, en premier lieu, que l'eau tombe sur la roue sans vitesse initiale. En représentant, par N, la section normale de la couronne d'eau portée par la roue, et considérant un point quelconque de l'arc chargé d'eau, et éloigné de l'origine des arcs (fixée à l'extrémité supérieure du diamètre vertical), d'un arc ω, dont la longueur réelle sera $r\omega$; r, étant le rayon de la roue: le volume porté sur un petit arc d'une longueur $r\,d\omega$, sera $n\,r\,d\omega$. Quand la roue est en repos, l'impression exercée par l'eau est égale au poids de celle-ci; mais, lorsqu'il y a mouvement, il faut, dit l'auteur, diminuer la vitesse g, qui représente la force accélératrice de la pesanteur, de la vitesse que le point que l'on considère a dans le même sens; or, v étant la vitesse à la circonférence, la vitesse verticale du point ci-dessus est $v\,\sin.\,\omega$. Il suit de là que le petit volume $n\,r\,d\omega$ n'exerce sur l'élément de la roue avec lequel il est en contact, qu'une impression mesurée par $n\,r\,d\omega\,(g - v\,\sin.\,\omega)$. Enfin, le moment de cette impression, pris par rapport à l'axe de la roue, est $n\,r\,d\omega\,(g - v\,\sin.\,\omega)\,r\,\sin.\,\omega$.

Maintenant, pour avoir l'effort total résultant de tous les petits volumes semblables à celui que nous venons de considérer, et qui s'étendent uniformément sur une partie de la circonférence de la roue, il faudra évidemment intégrer l'expression précédente, par rapport à ω, entre les limites qui fixeront les extrémités de l'arc chargé d'eau. Tout calcul fait, et la constance déterminée par la condition que l'intégrale devienne nulle à l'extrémité supérieure de l'arc chargé d'eau, et dont la distance à l'origine, c'est-à-dire au sommet de la roue, sera désignée par ε: on aura pour l'effort:

$$n\,r^2\,g\,(\cos.\,\varepsilon - \cos.\,\omega) - \tfrac{1}{2}\,n\,v\,r^2\,(\tfrac{1}{2}\sin.\,2\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\sin.\,2\,\omega - \varepsilon + \omega).$$

L'effet de la roue s'obtient en multipliant la va-

leur de l'effort par la vitesse absolue $\frac{v}{r}$: on a donc pour l'effet des roues à augets:

$$E = n\,g\,h\,v - \frac{n\,v^2}{2}\,(\tfrac{1}{2}\,r\,\sin.\,2\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\,r\,\sin.\,2\,\omega + s).$$

la quantité h représente la hauteur de la chute, égale à $r\,\cos.\,\varepsilon - r\,\cos.\,\omega$, et s est la longueur de l'arc qui répond à cette hauteur, ou $r\varepsilon - r\omega$. Telles sont les deux formules générales d'après lesquelles l'auteur de l'*Essai sur la science des machines* a présenté, dans un chapitre très-étendu, les propriétés mécaniques des roues à augets. Il les étend au cas où l'eau a une vitesse initiale, en augmentant la hauteur h de celle due à cette vitesse. Je remarque d'abord, en conservant la notation adoptée ci-dessus, qu'au lieu de décomposer la vitesse v de la roue, on pourrait, plus simplement, décomposer la force g de la pesanteur en deux forces; l'une tangente au point que l'on considère, et l'autre normale en ce même point, et par conséquent nulle pour l'effet de la machine; puisque, passant par l'axe, cette force est détruite. La force tangente aurait pour expression $g\,\sin.\,\omega$; ainsi, l'impression serait, en raisonnant comme précédemment, $n\,r\,d\omega\,(g\,\sin.\,\omega - v)$; et le moment de cette impression s'obtiendrait, dans ce cas, en multipliant par r; ce qui donnerait $n\,r^2\,d\omega\,(g\,\sin.\,\omega - v)$. L'expression de l'auteur de l'*Essai sur les machines*, correspondante à celle-ci, est $n\,r^2\,d\omega\,(g\,\sin.\,\omega - v\,\sin^2\omega)$; ou, en remplaçant $\sin^2\omega$ par $(1 - \cos^2\omega)$,

$$n\,r\,d\omega\,(g\,\sin.\,\omega - v + v\,\cos^2\omega)$$

qui diffère de la précédente, de la quantité positive $n\,r\,d\omega\,v\,\cos^2\omega$. Pour découvrir la raison de cette différence, je reviens à la manière dont l'auteur a décomposé la vitesse v de la roue, et je vois que la composante verticale étant $v \sin. \omega$, l'autre composante est par conséquent perpendiculaire à celle-ci, et égale à $v \cos. \omega$: or, il n'y a pas de raison de décomposer ainsi, plutôt qu'en deux forces, dont l'une verticale ferait avec l'autre un angle quelconque, et en dernier lieu la composante qui n'est pas verticale, produit un effet qu'on ne peut négliger, relativement à la valeur de l'impression, que dans le seul cas où cette composante est normale à la circonférence de la roue. L'auteur, ayant tout-à-fait négligé la force $v \cos. \omega$, a dû arriver à un résultat inexact. Si donc, pour corriger ce résultat, on décompose de nouveau cette force $v \cos. \omega$ en deux, l'une verticale et l'autre dirigée suivant le rayon $c\,m$ de la roue (*Pl.* V, *fig.* 1), et à laquelle on peut maintenant se dispenser d'avoir égard, la composante verticale sera $\frac{v \cos. \omega}{\text{tang.}\,\omega}$ ou $\frac{v \cos.^2 \omega}{\sin. \omega}$ (en remplaçant $\text{tang.}\,\omega$ par $\frac{\sin. \omega}{\cos. \omega}$) valeur qui retranchée de la force g, avec $v \sin. \omega$, donne pour l'impression, $n\,r\,d\omega \left(g - v \sin. \omega - \frac{v \cos.^2 \omega}{\sin. \omega}\right)$; ou, en faisant la réduction, $n\,r\,d\omega \left(\frac{g \sin. \omega - v}{\sin. \omega}\right)$; et, comme dans ce cas, il faut, pour avoir le moment de l'impression, multiplier par $r \sin. \omega$, on retrouve le même résultat obtenu plus haut en décomposant la force g, c'est-à-dire, $n\,r^2\,d\omega\,(g \cos. \omega - v)$. L'intégrale de cette expression est :

$$-n\,r^2\,g \cos. \omega - n\,r^2\,\omega\,v + C.$$

La constante C se détermine par la condition que l'expression précédente devienne nulle à l'extrémité supérieure de la couronne d'eau, dont la distance angulaire au sommet de la roue est ε : on aura donc $C = n\,r^2\,g \cos. \varepsilon - n\,r^2\,v\,\varepsilon$; et l'effet de la roue sera :

$$n\,r^2\,g\,(\cos. \varepsilon - \cos. \omega) - n\,r^2\,v\,(\omega - \varepsilon).$$

remplaçant $r\,(\cos. \varepsilon - \cos. \omega)$, par h ; et $r\,(\omega - \varepsilon)$, par s ; on aura enfin $n\,r\,g\,h - n\,r\,v\,s$, et pour l'effet, $n\,v\,g\,h - n\,v^2\,s$. Cette formule, déjà plus exacte que celle de l'auteur, est aussi beaucoup plus simple.

Mais il est encore une autre inexactitude qui s'est glissée dans la théorie que nous examinons. L'auteur dit positivement que les parties de la roue sur lesquelles chaque molécule pesante agit, se soustraient à cette action en raison de leur vitesse acquise. Cependant, lorsque l'eau est supposée agir sans percussion, elle ne commence à presser sur la roue que lorsque sa vitesse, soit initiale, soit due à la pesanteur, et décomposée suivant la tangente, est égale à la vitesse v ; et l'eau conservant celle-ci jusqu'à sa sortie des augets, il n'y a de pression exercée que depuis le point où les vitesses du moteur et de la roue sont égales, jusqu'à l'extrémité inférieure de la couronne liquide; et de plus, cette pression est la même que dans l'état de repos. D'après cela, le moment de l'impression exercée tangentiellement à la roue par le petit volume $n\,r\,d\omega$, sera $n\,r^2\,g \sin. \omega\,d\omega$, au lieu de $n\,r^2\,d\omega\,(g \sin. \omega - v)$; et la somme de ces momens sera $-n\,r^2\,g \cos. \omega + C$. Ici, la constante se déterminera par la condition que l'effort de la roue soit nul au point où sa vitesse est égale à celle de l'eau, dans le sens de la tangente, et dont la distance angulaire au sommet est ε; ainsi, l'expression de cet effort sera $n\,r^2\,g\,(\cos.\,\varepsilon - \cos.\,\omega)$; résultat qui se changera en $n\,r\,g\,h$, après avoir substitué h à la place de $r\,(\cos.\,\varepsilon - \cos.\,\omega)$; enfin, en multipliant par la vitesse absolue $\frac{v}{r}$, on trouvera pour l'effet $n\,v\,g\,h$.

Représentons maintenant, par H, la hauteur totale de la chute, c'est-à-dire la différence de niveau entre l'extrémité n de la couronne liquide et le point P, d'où l'eau, partant de l'état de repos, est censée tomber tangentiellement sur la roue; je dis censée tomber, car si elle avait toute autre direction SM (*fig.* 2.), la composante TM de sa vitesse, suivant le rayon cM, ne produirait qu'une percussion sur l'axe, et serait nulle pour l'effet, tandis que l'autre composante PM, perpendiculaire à la première, serait la seule à laquelle il fallût avoir égard. Cela posé, si on représente encore par H' la hauteur due à la vitesse v, et qui sera ici PR, on aura $h = H - H'$; substituant cette valeur dans l'expression de l'effet $n\,v\,g\,h$, il viendra $E = n\,v\,g\,H - n\,v\,g\,H'$; mais on a $v^2 = 2\,g\,H'$, et par conséquent $E = n\,v\,g\,H - \frac{n\,v \times v^2}{2}$.

Or, $n\,v$ est la quantité d'eau employée dans l'unité de temps; en la désignant par P, on obtiendra enfin, pour l'effet des roues à augets, $E = P\,g\,H - \frac{1}{2}\,P\,v^2$. Mise sous cette forme, l'expression de l'effet de ces moteurs s'appliquera immédiatement à la solution de la question suivante :

Si on avait une roue toute construite, et que l'eau fût assez abondante pour tenir les augets constamment pleins, quelle que fût la vitesse de cette roue, la hauteur de la chute restant la même, la machine serait susceptible d'un effet *maximum*. La vitesse correspondante à cet effet s'obtient facilement, en égalant à zéro la différentielle de l'expression précédente, prise par rapport à v, et après avoir remplacé P par $n\,v$. Ce calcul donne $g\,h\,d\,v - \frac{3\,v^2\,d\,v}{2} = o$, d'où $v^2 = \frac{2\,g\,h}{3}$ résultat de Bossut, et bien différent de celui de l'auteur de l'*Essai sur la science des machines*, qui dit positivement que, dans ce cas, la vitesse de la roue a pour limite celle g, que la pesanteur communique à chaque instant.

Je pourrais pousser plus loin cet examen; mais il suffit d'avoir prouvé la double erreur dont les formules générales de l'auteur sont affectées, pour conclure que toutes les conséquences qu'il en tire sont erronées, si ce n'est cependant lorsque la vitesse étant très-petite, il est permis de négliger le second terme.

L'équation $E = P\,g\,H - \frac{1}{2}\,P\,v^2$ que nous venons de trouver, en considérant particulièrement l'action de l'eau sur les roues à augets, ne convient pas seulement à ces machines, mais à toutes celles sur lesquelles l'eau agit sans percussion, le mouvement étant parvenu à l'uniformité, et la vitesse v étant la même pour tous les élémens de la masse P.

Cette proposition, ainsi que les propriétés générales des machines en mouvement, se déduisent de l'équation :

$$(a)\ \Sigma m v\, dv = \Sigma m\,(X dx + Y dy + Z dz),$$

obtenue de la combinaison des principes de d'Alembert et des vitesses virtuelles. *Voyez* la Mécanique de Poisson, tome II, N°. 467, et les principes de l'équilibre et du mouvement, par Carnot, page 207 et suivantes.

$X\,Y\,Z$ sont les forces accélératrices qui sollicitent les masses $m\ m'$ etc. d'un système, parallèlement aux axes $x\ y\ z$ des coordonnées, et $v\ v'\ v''$ sont les vitesses acquises par ces masses, au bout du temps t. On sait que le principe des forces vives a lieu toutes les fois que $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte.

Pour appliquer cette équation à l'effet général des machines mues sans percussion, représentons par R la résultante des forces $X\ Y\ Z$, et par dp sa vitesse virtuelle ; on aura d'après le principe général d'équilibre :

$$R\,dp = X dx + Y dy + Z dz.$$

Si, maintenant, g est la force accélératrice constante à laquelle sont soumises les masses mm', etc. du moteur ; que [illegible] soit l'ordonnée verticale, et que $\Sigma\, m\, R$ soient les résistances à vaincre, lesquelles, par leur nature, doivent entrer dans l'équation (a), affectées d'un signe contraire à celui de la puissance et des quantités $m v\ dv$, on tirera de cette équation :

$$\Sigma\, m \int R\, dp = \Sigma\, m g z - \frac{\Sigma\, m v^2}{2} + C.$$

Si, de plus, on désigne, par P, la somme des élémens matériels $m\ m'$, etc. de la puissance, et par ζ, l'ordonnée verticale de leur centre de gravité, on aura $P\zeta = m z + m' z' + \text{etc.} = \Sigma\, m z$;

et par suite, pour l'effet produit :

$$\Sigma\, m \int R\, dp = P g \zeta - \Sigma \frac{m v^2}{2} + C,$$

$$\text{ou } \Sigma\, m \int R\, dp = P g \zeta - \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{M V^2}{2} + C;$$

en écrivant séparément l'expression $\Sigma \frac{m v^2}{2}$ de la demi-somme des forces vives acquises par le poids $P g$, après qu'il est descendu de la hauteur ζ, et celle $\Sigma \frac{M V^2}{2}$ de la demi-somme des forces vives qui animent alors les masses de la résistance et de l'intermédiaire, au moyen duquel la puissance transmet son action.

Dans le cas du mouvement uniforme, $\Sigma \frac{M V^2}{2}$ sera constaté et disparaîtra avec C, en prenant l'intégrale, entre les limites $\zeta = 0, v = 0$ et $\zeta = h$, $v = u$, ce qui donnera, pour l'effet produit par un poids $P g$ qui agit sans percussion, sur une machine quelconque parvenue au mouvement uniforme : $E = P g h - \Sigma \frac{m u^2}{2}$ et $E = P g h - \frac{1}{2} P u^2$ (1) pour le cas où la vitesse u est commune à tous les élémens m, m', etc., de la masse P. Donc, si des masses P se succèdent sans interruption sur la machine, la valeur de E sera l'effet produit à chaque instant.

Lorsque la vitesse absolue de la masse P sortant de la machine après avoir exercé son action, est la même que la vitesse de rotation de la partie avec laquelle elle est en contact, la formule (1) s'applique immédiatement. Exemple : les roues à augets.

Une des applications les plus remarquables que l'on puisse faire de cette formule, est la recherche de l'effet des machines mues par la réaction de l'eau. On sait que ces moteurs consistent en un système de tuyaux mobiles autour d'un axe vertical, et entretenus constamment pleins d'eau, par un réservoir supérieur. Celle-ci s'échappe par un orifice pratiqué à l'extrémité inférieure de chaque tuyau, et perpendiculairement au rayon de la circonférence qu'elle décrit, d'où résulte, contre la partie directement opposée, ce que Bossut appelle *réaction*, et qui est ici la force motrice.

Soient u la vitesse d'écoulement, et V la vitesse uniforme du centre de chaque orifice. Supposons qu'elles aient lieu suivant la même ligne; et que, relativement à leur distance à l'axe, les orifices aient des diamètres assez petits pour que la vitesse V puisse être regardée comme celle d'un point quelconque de leur surface; $V-u$ ou $u-V$ sera la vitesse réelle de l'eau à sa sortie des tuyaux; et si, de plus, P est la quantité d'eau fournie à tous les tuyaux à-la-fois, lesquels sont en tout semblables et symétriquement placés autour de l'axe de rotation, et si H est la hauteur totale de la chute, ou la distance verticale entre chaque orifice et la surface de l'eau dans le réservoir, l'effet général de la machine aura pour expression $E = PgH - \frac{1}{2}P(V-u)^2$; d'où l'on conclut déjà, que pour l'effet *maximum*, il faut que $V=u$, ou que la vitesse d'écoulement soit égale à celle des orifices.

La vitesse u dépend de celle de la machine, et il faut avoir sa valeur, pour en conclure celle de E, en quantités connues.

On peut abréger de beaucoup la méthode que Bossut a donnée pour obtenir l'expression de la vitesse d'écoulement. En effet, soit tt' l'axe d'un des tuyaux qui tournent autour de l'axe AB. (*fig.* 3), on suppose le fluide divisé en tranches qui se meuvent perpendiculairement à la courbe tt', laquelle est à simple ou à double courbure, et les tuyaux assez étroits, pour que les vitesses de rotation des différens points d'une même tranche Tm soient sensiblement les mêmes que celles du point m, intersection de cette tranche avec la ligne tt'.

Faisons $AP=x$, $Pm=y$, $mn=ds$.

La tranche Tm est, à chaque instant, sollicitée par la pesanteur g et par la force centrifuge $= \frac{v^2}{y} = \frac{V^2 y}{b^2}$, v étant la vitesse de rotation du point m, V celle du point t', centre de l'orifice d'écoulement, et b le rayon $t'B$. Décomposons chacune de ces forces en deux autres, l'une tangente et l'autre normale à la courbe tt'. Les forces tangentes seront les seules auxquelles il sera nécessaire d'avoir égard, et leur expression sera, pour la pesanteur, $\frac{g\,dx}{ds}$; et, pour la force centrifuge, $\frac{V^2 y\,dy}{b^2 ds}$; car $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ sont les cosinus des angles respectivement formés par les directions de ces forces avec l'élément $mn=ds$. Donc, en vertu du principe de d'Alembert et des conditions d'équilibre des fluides, on aura, sur-le-champ, l'équation :

$$\int ds\left(\frac{g\,dx}{ds}+\frac{V^2y\,dy}{b^2\,ds}\right)-\int\frac{d\,v\,ds}{d\ t}$$

L'intégrale de la première partie est $gx+\frac{V^2y^2}{2b^2}+C$; et, si on nomme C, la valeur de y qui répond à l'extrémité supérieure du tuyau, et h, la hauteur AB, on aura, pour l'intégrale définie de ces deux premiers termes,

$$gh+\frac{V^2}{2b^2}(b^2-C^2).$$

Pour le terme $\int\frac{dv\,ds}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ étant une fonction de la vitesse u d'écoulement et de la section normale X du tuyau, l'idée qui se présente d'abord, est de différencier, par rapport à u et à X, la valeur de $V=\frac{Ku}{X}$, K désignant l'aire de l'orifice de sortie; de substituer dans l'intégrale $\int\frac{dv\,ds}{dt}$, et d'intégrer ensuite par rapport à s, en regardant u comme constant; mais on trouve, sans calcul, la valeur de $\int\frac{dv\,ds}{dt}$, en remarquant que l'intégrale provenant du terme de la différentielle de V, dans lequel u est constant, s'obtient de suite, en remplaçant ds par $v\,dt$, ce qui donne $K\int v\,dv=K\frac{v^2}{2}=\frac{K^3u^2}{2X^2}$. L'autre terme, dans lequel u est variable et X constant,

étant $\frac{K\,du}{X}$, on trouve immédiatement :

$$\int\frac{d\,v\,ds}{d\,t}=\frac{K^2\,du}{d\,t}\int\frac{ds}{X}+\frac{K^2\,u^2}{2X^2}+C.$$

L'intégrale étant prise, depuis la section supérieure du tuyau, que j'appelle M, jusqu'à l'orifice K, on aura :

$$\int\frac{dv\,ds}{dt}=\frac{K\,du}{dt}\int\frac{ds}{X}-\frac{K^2u^2}{2}\left(\frac{M^2-K^2}{M^2}\right).$$

Cette équation donnera la vitesse uniforme d'écoulement, en faisant $\frac{du}{dt}=0$, et l'on trouvera:

$$u^2=\frac{2M^2}{M^2-K^2}\left(gh+\frac{V^2}{2b^2}(b^2-C^2)\right).$$

Pour faire voir l'accord de la formule $PgH-\frac{1}{2}P(V-u)^2$ avec celle donnée par Bossut, je suppose avec cet auteur que le premier élément de la ligne tt' est perpendiculaire à la circonférence décrite par l'extrémité de cette courbe. La vitesse de rotation de ce point étant $\frac{VC}{b}$, et celle de l'eau, suivant l'élément tt'', étant $\frac{Ku}{M}$, la vitesse absolue du fluide sera $\sqrt{\frac{K^2u^2}{M^2}+\frac{C^2V^2}{b^2}}$; or, il faut que cette dernière soit produite par la pression de l'eau supérieure du réservoir, par conséquent, la hauteur totale

$$H=h+\frac{K^2u^2}{2gM^2}+\frac{C^2V^2}{2gb^2}.$$

Si on substitue la valeur de h dans celle de u^2, il viendra :

$$u^2 = \frac{2\,M^2}{M^2 - K^2}\left(gH - \frac{K^2 u^2}{2\,M^2} - \frac{C^2 V^2}{b^2} + \frac{V^2}{2}\right).$$

On tire de là $u^2 = 2\,g\,H + V^2 - \frac{2\,C^2 V^2}{b^2}$.

Au moyen de cette expression, la formule $P\,g\,H - \frac{1}{2}P\,(V-u)^2 = P\,g\,H - \frac{1}{2}P\,V^2 - \frac{1}{2}P\,u^2 + P\,V\,u$ devient $-P\,V^2 + \frac{P\,C^2\,V^2}{b^2} + P\,V\sqrt{2\,g\,H + V^2 - \frac{2\,C^2 V^2}{b^2}}$, c'est identiquement la même que celle de Bossut en faisant $1 - \frac{C^2}{h^2} = n$, et $V^2 = 2\,g\,f$.

L'application que nous venons de faire, comparée avec la méthode donnée par Bossut, dans son Hydrodynamique, est, je crois, ce qu'il y a de plus propre à montrer combien l'équation des forces vives peut épargner de calculs dans la recherche de l'effet des machines.

J'étendrai aux machines à colonne d'eau la remarque que j'ai faite en second lieu sur les roues à augets. Dans l'essai sur la science des machines, il est dit encore que le piston se soustrait à l'action de l'eau, en raison de sa vitesse acquise, et on trouve en conséquence, pour l'effet, $P\,g\,h - P\,v$; expression inexacte, dont le second terme, d'ailleurs, ne peut être comparé au premier, puisque celui-ci représente une force vive, et l'autre une simple quantité de mouvement. Ce n'est que lorsqu'il s'agit d'un choc que l'on doit avoir égard à la différence des

vitesses; et lorsque le mouvement, non encore parvenu à l'uniformité, se communique par pression, ou que le système change d'état par degrés insensibles, on ne doit faire entrer dans le calcul que la différence entre les forces accélératrices qui ont lieu en vertu de la liaison des élémens du système, et celles qui animeraient chacun de ces élémens s'il était isolé.

Je considérerai de suite le cas général où la hauteur de la colonne est variable pendant le mouvement, et je désignerai par u la vitesse du piston, par p la pression qu'il supporte, et par e l'espace qu'il a parcouru au bout du temps t; $p\,de$ ou $p\,u\,dt$ sera évidemment l'effet produit dans l'instant dt, et l'intégrale $\int p\,u\,dt$, prise entre les limites données, exprimera l'effet total.

Quoique l'expression de $\int p\,u\,dt$ puisse être donnée immédiatement par le principe de la conservation des forces vives, il n'est, je crois, pas inutile de faire voir comment on peut l'obtenir des principes de l'hydrodynamique.

Soit donc, comme l'indique la figure (4), une machine à colonne d'eau qui ait un tuyau de chute formé de plusieurs branches diversement inclinées, et dont le cylindre C soit vertical; il est permis de supposer que les tranches fluides se meuvent, dans chaque branche, parallèlement à elles-mêmes et perpendiculairement à son axe; or, en vertu de leur action mutuelle, la tranche dont la base est y et l'épaisseur dz, animée de la vitesse v au bout du temps t, recevra, dans l'instant suivant, l'accroissement dv; et, comme elle est sollicitée par la composante $g\,sin.\,a$ de la pesanteur, a étant l'angle formé avec l'horizon par l'axe de la tranche BD, la vitesse perdue sera $g\,sin.\,a\,dt - dv$. Donc, si on nomme B la barre du piston, les conditions d'équilibre des fluides donneront l'équation $p = \int (g\,sin.\,a + g\,sin.\,a' + \text{etc.})\,B\,dz - B\int \frac{dv}{dt}\,dz$; la somme des premiers termes est $Bg(h-e)$; h étant la distance verticale entre la surface de l'eau dans le réservoir et l'extrémité inférieure de la course du piston. Si maintenant on multiplie chaque membre par udt ou de, et que l'on intègre, il viendra

$$\int pudt = Bghe - \frac{Bge^2}{2} - B\int udt \int \frac{dv}{dt}\,dz;$$

mais à cause de l'incompressibilité du fluide il en passe à chaque instant le même volume, par la section horizontale du cylindre, et par toute section normale y du tuyau de chute; par conséquent $Budt = vydt$. Si on substitue cette valeur dans l'équation précédente, après avoir fait passer, sous le second signe $\int$, la quantité $Budt$, ce qui est permis, car l'intégrale $\int \frac{dv\,dz}{dt}$ est prise en regardant u comme constant et n'est relative qu'à z, on aura $\int pudt = Bghe - \frac{Bge^2}{2} - \int\int vdvydz$. Remarquons maintenant que ydz est le volume de la tranche fluide qui a pour base y et pour épaisseur dz; ainsi, on peut considérer en particulier le mouvement de cette tranche, et intégrer d'abord par rapport à V; dans ce mouvement, la tranche ydz pourra changer en largeur et en épaisseur, mais ne changera pas de volume, de manière qu'on aura

toujours $ydz = Bde$. On pourrait aussi commencer l'intégration relativement à z, mais il faudrait préalablement remplacer vdv par sa valeur tirée de l'équation $V = \frac{Bu}{y}$, en faisant varier à-la-fois u et y.

D'après cela, $\int vdvydz = \frac{V^2}{2}ydz + Cydz$.

Si le réservoir n'était rempli que par intervalle et que le volume total de la colonne d'eau restât constant pendant le mouvement, C serait toujours nul; mais on suppose que le niveau de l'eau ne change pas, et qu'à mesure que la tranche supérieure du réservoir descend d'une hauteur dz, elle est remplacée par une autre qui reçoit une vitesse V' des tranches inférieures, en vertu de l'adhérence réciproque des molécules fluides; c'est, en effet, le cas le plus ordinaire de la pratique où le réservoir répare ses pertes par un affluent latéral; la quantité C devient alors $\frac{v'^2}{2}$. Ainsi on aura $\int pudt = Bghe - \frac{Bge^2}{2} - \int \frac{v^2ydz}{2} - \int \frac{v'^2}{2}\,YdZ$; Y et dZ étant ce que deviennent y et dz au niveau de l'eau du réservoir. L'intégrale $\int \frac{v^2ydz}{2}$ doit être prise depuis ce niveau, par rapport à z, et en regardant u comme constant, jusqu'à la limite supérieure de la course du piston.

L'autre intégrale n'est seulement relative qu'aux tranches de fluide introduites pendant le mouvement, et doit être prise à-la-fois par rapport à u et à e. L'expression de $\int pudt$ pourra donc être mise sous cette forme, en remplaçant

$$V \text{ par } \frac{Bu}{y},\ V' \text{ par } \frac{Bu}{Y} \text{ et } dz \text{ par } \frac{Bde}{Y},$$

$$\int pudt = Bghe - \frac{Bge^2}{2} - \frac{B^2u^2}{2}\int\frac{dz}{y} - \frac{B^3}{2Y^2}\int u^2de.$$

L'intégrale $\int\frac{dz}{y}$ est purement géométrique et ne dépend que de la forme des tuyaux. Si, par exemple, ils sont d'égal diamètre, $\int\frac{dz}{y}$ deviendra $\frac{l}{\frac{1}{4}\pi d^2} + \frac{e}{B}$, l étant la longueur développée de l'axe des tuyaux de chute et d leur diamètre commun. $\frac{e}{B}$ est évidemment la partie de $\int\frac{dz}{y}$ qui se rapporte à l'espace e parcouru par le piston dans le cylindre principal. En général, représentons par N, la valeur de $\int\frac{dz}{y}$ relative aux tuyaux de chute, et substituons dans l'équation précédente, l'expression $N+\frac{e}{B}$, à la place de cette intégrale, nous aurons :

$$(A)\ \int pudt = Bghe - \frac{Bge^2}{2} - \frac{Bu^2e}{2} - \frac{B^2u^2N}{2} - \frac{B^3}{2Y^2}\int u^2de.$$

Telle est l'expression générale de l'effet de la machine à colonne d'eau. Le dernier terme, qui dépend de la relation entre la vitesse et l'espace

parcouru, sera toujours négligeable à cause du facteur $\frac{B^2}{2Y^2}$ qui est toujours très-petit.

Je passe maintenant à la recherche de la vitesse u du piston en fonction de l'espace e, et à celle du temps employé à chaque oscillation.

Pour fixer les idées, je choisis le cas le plus ordinaire où les vitesses v, v', v'' etc., des élémens matériels m, m', m'' etc., qui composent la résistance et les diverses pièces de la machine, sont proportionnelles à la vitesse u du piston et ne dépendent point de la variable e, de manière qu'on a $v = cu$, $v' = c'u'$ etc. Je suppose aussi que l'action du moteur est intermittente; telle serait, par exemple, une machine à colonne d'eau servant à l'épuisement des eaux d'une mine. Si on représente, par M, la somme des masses à élever, $\varphi(u)$ celle des résistances provenant du frottement, soit des parties solides les unes contre les autres, soit de l'eau contre les parois des tuyaux, ces masses et ces résistances rapportées à l'extrémité de la tige du piston, les principes de d'Alembert et des vitesses virtuelles donneront l'équation :

$$pde = Mgde + \varphi(u)de + Kudu;$$

le terme $Kudu$ étant l'équivalent de $\Sigma mvdv = mvdv + m'v'dv'$, etc., substituant cette valeur dans la différentielle de l'équation (A), prise par rapport aux variables e et u, on obtiendra :

$$(B)\ Mgde + \varphi(u)de + Kudu = Bg(h-e)de - B^2Nudu - Beudu - \frac{Bu^2de}{2} - \frac{B^3}{2Y^2}u^2de.$$

Il faut avoir maintenant une expression de

$\varphi(u)$ qui, non-seulement, soit exacte, mais rende l'intégration possible, sinon immédiatement, du moins, par le moyen d'un facteur. Or, M. Prony a prouvé (*Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*) que la résistance due au frottement de l'eau, dans les tuyaux de conduite, pouvait être représentée par la formule

$$\pi d l (0{,}000\,17\, v + 0{,}003416\, v^2);$$

d est le diamètre du tuyau, l sa longueur, et v la vitesse de l'eau. Si on introduisait cette formule dans l'équation précédente, celle-ci ne serait point intégrable par les moyens connus; heureusement que le premier terme dont le coefficient est, comme on voit, vingt fois plus petit que celui de v^2, peut être négligé sans erreur sensible. En effet, pour avoir une idée du peu d'influence qu'il a dans la loi du mouvement des machines à colonne d'eau, prenons, pour exemple, un tuyau de chute dont le développement soit de 100 mètres, la hauteur verticale de 80 mètres, et qui ait 20 centimètres de diamètre, l'eau étant supposée avoir une vitesse de 4 mètres par seconde. Mais avant de réduire en nombre l'expression précédente de la résistance au moyen de ces données, je fais observer, si on veut évaluer celle-ci en kilogrammes, qu'il faut préalablement diviser les deux termes dont elle se compose, par la force accélératrice de la pesanteur $= 9^{m}{,}808$, et les multiplier par la pesanteur spécifique de l'eau, qui sera ici le poids d'un mètre cube d'eau, c'est-à-dire, 1000 kilogrammes : car leur somme représente la pression qui fait équilibre à la résistance du fluide dans les tuyaux de conduite, lorsque le mouvement

a atteint l'uniformité. Faisant la substitution et les calculs que je viens d'indiquer, on trouvera 4 kilogrammes, résultat tout-à-fait insensible, eu égard à la force motrice.

Nous pouvons donc nous borner au second terme de la formule précédente, auquel nous en ajouterons un autre $\Sigma R v^2$ de même forme, et qui représentera la résistance que l'eau éprouve, soit au passage du robinet, soit dans les coudes des tuyaux. Cette résistance, principalement due au choc de l'eau, doit être en raison directe du carré de la vitesse.

Quant aux frottemens des solides, ils sont de deux sortes : ceux des pistons, et que l'on peut considérer comme constans, et ceux autour des axes, et qui sont proportionnels aux pressions produites par le poids des parties mobiles de la machine et par les tractions qui les sollicitent. Celles-ci varient en général avec la vitesse u et la force accélératrice $\frac{du}{dt}$, et l'on ne peut calculer, en toute rigueur, les frottemens qui en résultent, que lorsque les tractions qui agissent sur chaque partie de la machine mobile autour d'un axe sont parallèles, ce qui ne change point la forme de l'équation (B). Dans tout autre cas, le problème, s'il ne devient insoluble, présente les plus grandes difficultés, parce que l'équation différentielle renfermerait les carrés de $\frac{du}{de}$ et la quatrième puissance de la vitesse; mais on peut encore ici avoir une approximation suffisante, en calculant les frottemens sans avoir égard aux variations de u et de $\frac{du}{de}$, et comme s'il s'agissait d'un équilibre où la puissance fût sur le point de prévaloir. Ainsi, nous adopterons pour $\varphi(u)$ l'expression suivante :

$$R' + \Sigma R v^2 + \Sigma \pi D l\,(0{,}003416\, v^2)$$

et nous aurons

$$(M+R')de + de\,\Sigma R v^2 + \Sigma \pi D l (0{,}003416\, v^2)\, de + K u du$$
$$= Bg(h-e)\,de - B^2 N u du - B e u du - \frac{B u^2 de}{2};$$

à la rigueur, on devrait encore comprendre dans l'équation précédente un terme de la forme $\pi D' e\,(0{,}003416\, u^2)$, et exprimant la résistance variable due à l'eau contenue dans le cylindre d'ascension, quand le piston a parcouru l'espace e. Mais, comme dans toutes les suppositions possibles, cette résistance ne peut avoir qu'une influence extrêmement petite dans les résultats, à cause du très-peu de hauteur du cylindre relativement à la colonne entière, et que la vitesse u est toujours beaucoup plus petite que la vitesse v, puisqu'elles sont en raison inverse des carrés du diamètre du tuyau et du piston; cette résistance, dis-je, pourra encore être négligée, ce qui simplifiera l'expression de la vitesse.

Je remplace maintenant v par sa valeur $\frac{Bu}{b}$, b étant la section d'un tuyau perpendiculaire à son axe; je fais $Bgh - M - R' = A$, $Bg = A'$, $B^2 N + K = C$, $u^2 = S$, $\Sigma R \frac{B^2}{b^2} + \Sigma \pi D l \left(0{,}003416 \frac{B^2 u^2}{b^2}\right) = C'$, et j'ai $de\,(C'S - A + A'e) = ds\,\frac{(2C + Be)}{2}$. (1)

Cette équation ne satisfaisant aux conditions d'intégrabilité que dans le cas particulier où $\frac{B}{2} = C'$, il faut chercher un facteur qui la rende immédiatement intégrable, quel que soit le rapport de B à C', soit z ce facteur; il doit être tel que l'on ait :

$$\frac{d\left[z\,(C'S - A + A'e)\right]}{ds} = \frac{d\left[z\,\frac{(2C + Be)}{2}\right]}{de}.$$

En prenant la différentielle du premier membre par rapport à S, et celle du second par rapport à e, on trouvera $\frac{dz}{ds}(C'S - A + A'e) -$

$$\frac{dz}{de}\frac{(2C + Be)}{2} - \frac{Bz}{2} + C'z.$$

Comme il y a une infinité de facteurs propres à remplir les conditions d'intégrabilité, il suffit de satisfaire à cette équation. Or, en supposant z indépendant de S, le premier terme disparaît, et les variables de l'équation restante se séparent immédiatement. En effet, on a :

$\frac{dz}{z} = -\left(\frac{B - 2C'}{2C + Be}\right) de$, d'où l'on tire

$z = (2C + Be)^{\frac{2C' - B}{B}}$; multipliant par ce facteur les deux termes de l'équation (1), il viendra :

$$ds\,(2C + Be)^{\frac{2C'}{B}} + 2de\,(C'S - A + A'e)\,(2C + Be)^{\frac{2C' - B}{B}} = 0.$$

Celle-ci étant maintenant une différentielle complète, son intégrale s'obtiendra en prenant séparément celle du premier terme par rapport à S, et y ajoutant une fonction de e qui se déterminera en comparant, avec l'équation précédente, la différentielle des deux termes

$S(2C+Be)^{\frac{2C'}{B}} + \varphi e$, ce qui donnera d'abord

$$\frac{d(\varphi e)}{de} = -2A(2C+Be)^{\frac{2C'-B}{B}} + 2A'e(2C+Be)^{\frac{2C'-B}{B}};$$

d'où l'on tire, après les calculs et les réductions, $\varphi e = -(2C+Be)^{\frac{2C'}{B}}$

$$\left(\frac{2A}{2C'} + \frac{2A'C}{C'(B+2C')} - \frac{2A'e}{B+2C'}\right) + \text{const.}$$

Comme e désigne l'espace parcouru par le piston, on a en même temps $e=o$ et S ou $u^2=o$, et par conséquent pour la valeur de la constante,

$$2C^{\frac{2C'}{B}}\left(\frac{2A}{2C'} + \frac{2A'C}{C'(B+2C')}\right).$$

L'intégrale définie sera donc

$$(2C+Be)^{\frac{2C'}{B}}\left(S - \frac{2A}{2C'} - \frac{2A'C}{C'(B+2C')} + \frac{2A'e}{B+2C'}\right)$$

$$= -2C^{\frac{2C'}{B}}\left(\frac{2A}{2C'} + \frac{2A'C}{C'(B+2C')}\right)$$

et on aura pour S la valeur suivante :

$$S = \frac{2A}{2C'} + \frac{2A'C}{C'(B+2C')} - \frac{2A'e}{B+2C'} - \left(\frac{1}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}}$$

$\left(\frac{2A}{2C'} + \frac{2A'C}{C'(B+2C')}\right)$ équation de la forme

$$S = M - ne - \left(\frac{m}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}}$$

C'est celle d'une hyperbole du degré $B+2C'$ et qui a pour asymptote la ligne droite représentée par l'équation $S = M - ne$; car la quantité

$\left(\frac{m}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}}$ devient nulle quand e est infini.

Si la disposition de la machine était telle que la hauteur verticale de la colonne d'eau ne variât point pendant le mouvement, le terme $Bg(h-e)de$ de l'équation différentielle serait simplement $Bghde$, A' disparaîtrait de la valeur de S, et on aurait S ou $u^2 = \frac{A}{C'} -$

$\frac{A}{C'}\left(\frac{1}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}}$, résultat qui semblerait faire

voir que, dans cette machine, la plus grande valeur de S, ou la limite dont s'approche la vitesse du piston, est $\frac{A}{2C'}$; mais ce résultat n'étant vrai que pour les petites valeurs de e, cette conclusion ne peut avoir lieu, et dans ce cas, comme lorsque le cylindre est vertical, la vitesse ne peut devenir constante, puisque dans la supposition où le piston aurait une course indéfinie, la résistance provenant du frottement de l'eau contre les parois du cylindre, croissant proportionnellement à e et à u^2, ne peut plus être négligée. Il n'y aurait qu'un maximum de vitessse, dont l'équation différentielle donnerait seulement l'expression, en y faisant $\frac{ds}{de}=0$, après y avoir introduit un terme de la forme $R''es$, représentant le frottement de l'eau contenue dans le cylindre, quand le piston a parcouru l'espace e. La vitesse ayant atteint ce maximum, diminuera ensuite jusqu'à devenir nulle.

L'expression générale du temps de la levée du piston, déduite des valeurs de u^2, serait trop compliquée pour être utile; mais on pourra y suppléer par la formule $u=\frac{de}{dt}$, si, en effet, on divise la course du piston en un nombre n de parties assez petites, pour que chacune d'elles, supposée égale à de, soit parcourue d'un mouvement sensiblement uniforme; et si on calcule la vitesse correspondante à chaque division, au moyen de l'une ou de l'autre des formules précédentes, selon que la hauteur verticale de la colonne est constante ou variable, l'équation $u=\frac{de}{dt}$ donnera $dt=\frac{de}{u}$, et la valeur qui s'en suivra pour dt, sera d'autant plus exacte que les

divisions seront plus nombreuses; de sorte que u, u', u'', étant les différentes vitesses avec lesquelles le piston parcourt successivement le petit espace de, le temps total T, que le piston emploie à fournir sa course, sera équivalent à $\frac{de}{u}+\frac{de}{u'}+\frac{de}{u''}+$ etc. Comme le cylindre d'ascension a ordinairement 2 mètres de longueur, il suffirait de calculer $\frac{de}{u}$, de 4 en 4 décimètres.

Lorsque le piston descend, il n'est soumis qu'à l'action des forces accélératrices constantes, et il est alors toujours facile de calculer le temps qu'il emploie à revenir à sa première position.

Le cas que nous venons de considérer se rapporte aux machines à colonne d'eau à simple effet, où la vitesse du piston est sans cesse variable, depuis zéro jusqu'à celle qu'il possède à l'extrémité de sa course. Mais si, par une disposition quelconque, la machine devenait à double effet, c'est-à-dire, si la colonne agissait sans interruption, il faudrait employer un volant qui, comme on le sait, aurait la propriété de rendre le mouvement à fort peu près uniforme. Ainsi, la vitesse u du piston, et par suite, celles des autres parties du système, pourraient être regardées comme constantes, ou du moins la vitesse moyenne en différerait d'une quantité très-petite qu'on pourrait négliger sans erreur appréciable. Si donc on supprime dans l'équation (B) les termes affectés de la différentielle du, relatif au moment d'inertie des parties de la machine et de la colonne motrice, que l'on désigne par H la hauteur moyenne de cette colonne, et par U la vitesse moyenne du piston, il viendra, en divisant par de :

$$Mg + \varphi(U) = BgH - \frac{BU^2}{2} - \frac{B^3U^2}{2Y^2}$$

ou, plus simplement, en négligeant encore le dernier terme à cause du facteur $\frac{B^3}{2Y^2}$, toujours très-petit, comme c'est l'ordinaire, si la surface Y du réservoir est très-grande relativement à la base B du piston :

$$Mg + \varphi(U) = BgH - \frac{BU^2}{2}.$$

On a vu précédemment qu'on pouvait prendre pour $\varphi(U)$, l'expression

$$R' + \Sigma R\frac{U^2B^2}{b^2} + \Sigma\pi Dl(0{,}00341\ldots);$$

on aura donc, en désignant par C', le coefficient de U^2, $BgH - Mg - R' = C'U^2$.

Telle serait alors la relation entre la vitesse moyenne U, la hauteur H, la base B du piston, et les résistances à vaincre.

L'effet de la machine, pour le cas qui nous occupe, se déduirait de l'équation (A) en supposant u constant et égal à U, et en prenant $\int pudt$ entre les limites $e = o$, $u = U$ et $e = E$, ce qui donnerait : $BgHE - \frac{BU^2E}{2}$;

$$\text{et } BgHE - BE\frac{(BgH - Mg - R')}{C'},$$

après avoir substitué la valeur de U tirée de l'équation précédente. En doublant cette quantité, on aurait l'effet correspondant à chaque oscillation du piston.

MÉMOIRE

Sur les minerais de fer des houillères, ou fer carbonaté lithoïde;

Par M. DE GALLOIS, Ingénieur en chef au Corps royal des Mines.

LES minéralogistes ont connu de tout temps des minerais de fer terreux ; mais les chimistes n'y ayant indiqué que de *l'oxide de fer*, ils les ont considérés comme tels. Cependant, ils y avaient reconnu des caractères assez différens des autres oxides de fer, pour les autoriser à les classer séparément.

Werner, et avec lui tous les minéralogistes allemands, après avoir décrit les deux espèces d'oxide de fer, qui cristallisent et qui ont l'éclat métallique, le fer oxidulé (*magneteisenstein*) et le fer oligiste (*eisenglanz*), ont formé d'abord deux autres espèces d'oxide de fer, qui ont souvent la texture fibreuse, et qui comprennent les hématites ; elles sont distinguées l'une de l'autre par leur couleur, ou, au moins, par celle de leur poussière : l'une est rouge (mine de fer rouge, *rotheisenstein*), l'autre est brune (mine de fer brune, *brauneisenstein*). Enfin ils forment une cinquième espèce, qui est encore regardée comme un oxide de fer, sous le nom de fer argileux (*thoneisenstein*, ou *thonartiger eisenstein*), sans doute parce qu'il est en général plus mélangé de matières terreuses que les autres, et que dans beaucoup de cas il a, au moins en partie, la cassure terreuse.