lant, lanterne et roues dentées, faisant voir les mécanismes à l'aide desquels on serre le frein et ferme ou ouvre le troisième robinet, lesquels mécanismes sont enfilés sur le même axe.

Fig. 6. Projection verticale du régulateur dans un sens, et projection dans un deuxième sens d'une des piles qui fait ouvrir et fermer les premier et deuxième robinets.

Fig. 7. *a*, Projection verticale du mécanisme qui fait ouvrir les deux robinets d'où vient l'eau au cylindre et qui l'en font écouler.

b, Mécanisme du troisième robinet.

Fig. 8. Coupe verticale d'un des robinets et de la plaque de fer vissée qui arrête sa queue en même temps qu'elle lui permet de tourner dessus.

Sur une nouvelle manière de calculer les angles des cristaux;

Par M. G. LAMÉ, élève ingénieur au Corps royal des Mines (1).

Des considérations purement géométriques ont conduit M. Haüy aux calculs qui déterminent les élémens des cristaux, et cette méthode offre ici ce grand avantage qu'en ne perdant pas, pour ainsi dire, la géométrie de vue, il est plus facile d'interpréter à son profit les résultats de l'algèbre. Ce n'est pas que cette théorie ne puisse se calculer par abscisses et ordonnées, cette manière d'aborder la question offre même de son côté de grands avantages; mais peut-être serait-elle insuffisante si l'on cherchait à connaître les rapports des longueurs, plutôt que les angles des faces des cristaux; peut-être aussi, ce nouveau calcul exigerait-il des connaissances mathématiques un peu plus grandes du minéralogiste qui voudrait étudier cette théorie, et que pour remédier à cet incon-

(1) Cet article et le suivant sont extraits d'un ouvrage de M. Lamé, ayant pour titre: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Cet ouvrage, qui prouve de la part de son jeune auteur des connaissances approfondies, sera lu avec un grand intérêt par les personnes qui se livrent à l'étude des mathématiques; elles y trouveront des principes généraux dont elles pourront faire de fréquentes applications pour la solution des problèmes.

(*Note des Rédacteurs.*)

vénient les méthodes les plus élémentaires sont toujours préférables.

Cependant, pour prouver que l'analyse de Descartes n'est pas incapable de traiter une des plus belles applications du calcul à la géométrie, je vais indiquer la marche qu'elle pourrait prendre. Si je réussis à donner une analyse simple et facilement applicable, je m'applaudirai d'avoir fait rentrer sous le domaine d'un calcul qui doit être général, un sujet qui semblait le fuir; et si malgré mes tentatives ce calcul se trouve compliqué, on ne pourra du moins rien en conclure contre la généralité de son application.

Préliminaires.

Les axes que nous considérons seront obliques, nous désignerons leurs angles par α, β, γ. L'équation du plan sera mise sous la forme (1) $\frac{x}{M} + \frac{y}{N} + \frac{z}{P} = 1$. Les quantités M, N, P, que j'appellerai les paramètres du plan, représenteront alors les distances de l'origine des coordonnées aux points où le plan vient rencontrer les axes. La formule qui donne le cosinus de l'angle de deux droites dont les équations sont

$$x = az, \quad y = bz,$$
$$x = a'z, \quad y = b'z,$$

est $\cos V = \dfrac{1 + aa' + bb' + (ab' + a'b)\cos\gamma + (b + b')\cos\alpha + (a + a')\cos\beta}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma + 2a\cos\beta + 2b\cos\alpha}\sqrt{1 + a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos\gamma +}}$

Pour trouver l'équation d'une droite perpendiculaire au plan (1), il suffit d'exprimer que la droite est perpendiculaire aux traces de ce plan, soient à cet effet (2) $x = az, y = bz$, les équations inconnues de cette perpendiculaire. La trace du plan, sur celui des yz, a pour équations... $x = 0, y = -\frac{N}{P}z + N$, on exprimera qu'elle est perpendiculaire à la droite (2) en exprimant que $\cos V = 0$ lorsque l'on y fait $a' = 0$, $b' = -\frac{N}{P}$, ce qui donne entre a et b une première équation de condition.

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{P}\cos\alpha\right) + a\left(\frac{1}{N}\cos\beta - \frac{1}{P}\cos\gamma\right) + b\left(\frac{1}{N}\cos\alpha - \frac{1}{P}\right) = 0.$$

On peut déduire l'équation exprimant que la droite (2) est perpendiculaire à la trace du plan proposé sur celui des xz, en y changeant les lettres b, β, N, en a, α, M, et réciproquement, d'où

$$\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{P}\cos\beta\right) + b\left(\frac{1}{M}\cos\alpha - \frac{1}{P}\cos\gamma\right) + a\left(\frac{1}{M}\cos\beta - \frac{1}{P}\right) = 0.$$

Ces deux équations donneront les valeurs de a et b, et les équations de la perpendiculaire au plan seront connues.

Nous rappellerons que l'angle de deux plans est le même que celui formé par deux perpendiculaires à ces plans, et que celui d'une droite et d'un plan est le complément de l'angle de cette droite et de la perpendiculaire au plan.

Théorie.

D'après les remarques de M. Haüy, le calcul des décroissemens sur toutes les formes primitives est ramené à la théorie du parallélipipède. Nous supposerons donc que la forme primitive est un parallélipipède. Ses arêtes seront représentées par A, B, C, et les angles qu'elles forment entre elles par α, β, γ. Prenons les axes parallèles aux arêtes. Les huit angles solides formés par ces axes correspondront aux huit angles solides du cristal; de sorte que si l'on veut considérer un décroissement sur un de ces angles, il suffira de considérer la face qui en résulterait sur l'angle à l'origine qui lui correspond. Nous supposerons toujours les plans de décroissemens menés par cette origine parallèlement à leur direction; supposition qui nous est permise, puisque nous ne voulons calculer que les angles.

Considérons maintenant l'un des angles solides du cristal, par exemple, celui qui correspond à l'angle de l'origine dans lequel les coordonnées sont positives. Le décroissement sera le plus général possible, s'il a lieu par une soustraction de m fois l'arête A suivant l'axe des x, de n fois l'arête B suivant l'axe des y, et de p fois l'arête C suivant l'axe des z, les trois nombres m, n, p, étant différens. D'où il suit que les paramètres de la face résultante de décroissement seront proportionnels à mA, nB, pC. L'équation d'un plan qui lui serait parallèle, mené par l'origine, sera donc

$$\frac{x}{mA}+\frac{y}{nB}+\frac{z}{pC}=0.$$

Si le décroissement avait lieu sur un autre angle solide du cristal, il faudrait pareillement considérer à l'origine l'angle qui lui correspond. Pour comprendre tous les décroissemens dans une seule équation, il suffit d'indiquer que les paramètres sont susceptibles de changer de signe, ce qui donnera

$$\pm\frac{x}{mA}\pm\frac{y}{nB}\pm\frac{z}{pC}=0.$$

Si le décroissement est du genre que M. Haüy a nommé intermédiaire, les nombres m, n, p, sont tous différens. Si le décroissement a lieu sur les angles sans être intermédiaire, deux des nombres m, n, p, sont égaux. Enfin si le décroissement a lieu sur une arête, un des nombres, m, n, p, est infini, et l'équation du décroissement est de l'une quelconque des formes suivantes :

$$\frac{x}{mA}\pm\frac{y}{nB}=0,\quad \frac{x}{mA}\pm\frac{z}{pC}=0,\quad \frac{y}{nB}\pm\frac{z}{pC}=0.$$

L'axe du cristal est ordinairement supposé parallèle à l'une des arêtes; quelquefois il joint deux sommets aigus, et alors il a pour équations

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}.$$

L'angle qu'une face de décroissement fait avec l'axe est complément de celui que fait cet axe avec une perpendiculaire à la face. L'angle de deux faces est le même que l'angle formé par deux perpendiculaires à ces mêmes faces. Les préliminaires donnent le moyen de calculer ces angles s'il en est besoin.

Si l'on veut calculer les angles plans d'un cristal, on cherchera les angles formés par les droites intersections de la face que l'on considère et des faces adjacentes.

Cette méthode a cela d'avantageux, que l'on peut trouver immédiatement l'angle que fait telle face d'un cristal secondaire avec telle face d'un autre cristal pareillement secondaire, pourvu que l'on connaisse les décroissemens qui font naître ces deux faces.

Cas particuliers.

1°. Si la forme primitive est un parallélipipède rectangle, les cosinus des angles α, β, γ, sont nuls. Les formules préliminaires se simplifient singulièrement, aussi le calcul des angles est-il beaucoup plus simple. Si de plus le parallélipipède est un cube, on a $A=B=C$, et l'équation d'un décroissement quelconque est de la forme $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=0$. La valeur de $\cos V$ est

$$\cos V = \frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

Les équations d'une perpendiculaire au plan $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=0$, sont $x=\frac{m}{p}z$, $y=\frac{p}{n}z$.

Pour calculer l'angle de l'octaèdre, cristal secondaire provenant d'un décroissement uniforme sur les angles du cube, il suffira de faire $m=n=p$. Les équations de deux faces adjacentes seront... $x+y+z=0$... $x+y-z=0$...; si a et b, dans la valeur de $\cos V$, appartiennent à la perpendiculaire au premier plan, leur valeur sera $+1$, et si a' et b' appartiennent à la perpendiculaire au second, leur valeur sera -1, en sorte que $\cos V=-\frac{1}{3}$.

Pour calculer l'angle, plan du même solide, on observera que la face $x+y+z=0$ est adjacente aux deux faces $x-y+z=0$ et $-x+y+z=0$, son intersection avec la première a pour équations $x+z=0$, $y=0$, son intersection avec la seconde $x=0$, $y+z=0$; si donc on fait dans $\cos V$, $a=-1$, $b=0$, $a'=0$, $b'=-1$, on aura $\cos V=\frac{1}{2}$ d'où $V=\frac{200^\circ}{3}$, et en effet chaque face de l'octaèdre est un triangle équilatéral.

Pour calculer les angles que forment entre elles les faces du dodécaèdre rhomboïdal, cristal secondaire provenant d'un décroissement uniforme sur les arêtes du cube, on aura pour les équations de toutes les faces de ce polyèdre :

$$x\pm y=0,\quad x\pm z=0,\quad y\pm z=0.$$

Il y aura deux angles à considérer, celui que font les faces $x+z=0$, $x-z=0$, et celui que font celles représentées par les équations $x+z=0$, $y+z=0$. Les équations des perpendiculaires aux deux premières faces donnent $a=1$, $b=0$, $a'=-1$, $b'=0$, d'où $\cos V=0$. $V=100^\circ$. Les équations des perpendiculaires aux deux autres faces donnent $a=1$, $b=0$, $a'=0$, $b'=1$, d'où $\cos V=\frac{1}{2}$, $V=\frac{200^\circ}{3}$. Quant à l'angle du rhombe, on observera que la face $x-y=0$, est adjacente aux deux autres $x+z=0$, $y-z=0$; son intersection avec la première aura pour équations $x+z=0$, $y+z=0$, son intersection avec la seconde $x-z=0$, $y-z=0$; donc, en supposant $a=-1$, $b=-1$,

$a'=1$, $b'=1$, on aura $\cos V=\frac{1}{3}$. C'est ce qui devait être le dodécaèdre pouvant provenir d'une troncature tangente à tous les angles de l'octaèdre.

Le dodécaèdre pentagonal de la minéralogie provient d'un décroissement d'une rangée en largeur, et de deux en hauteur sur les arêtes du cube. Ses faces ont pour équations :

$$z\pm\frac{y}{2}=0,\ x\pm\frac{z}{2}=0,\ y\pm\frac{x}{2}=0.$$

Les angles formés par les plans seront de trois espèces. Le premier formé par les faces $z+\frac{y}{2}=0$, $z-\frac{y}{2}=0$, donne $\cos V=-\frac{3}{5}$; le second, formé par les faces $z+\frac{y}{2}=0, x+\frac{z}{2}=0$, a pour cosinus $-\frac{2}{5}$; enfin, le troisième, formé par les faces $x+\frac{z}{2}=0$, $x-\frac{z}{2}=0$, a pour cosinus $-\frac{1}{5}$.

Les angles du pentagone sont pareillement de trois espèces. Le premier est formé par les intersections du plan $x-\frac{z}{2}=0$ avec les deux autres $z\pm\frac{y}{2}=0$; ces intersections ont pour équations $x=\frac{1}{2}z$, $y=2z$; $x=\frac{1}{2}z$, $y=-2z$, faisant donc $a=\frac{1}{2}$, $b=2$, $a'=\frac{1}{2}$, $b'=-2$, on aura pour le cosinus de cet angle $\cos V=-\frac{11}{21}$. Le second est formé par les droites d'intersection du plan $x-\frac{z}{2}=0$, et les deux autres $z-\frac{y}{2}=0$, $y+\frac{x}{2}=0$, lesquelles ont pour équations $x=\frac{1}{2}z$, $y=2z$, $x=\frac{1}{2}z$, $y=-\frac{1}{4}z$, les hypothèses $a=a'=\frac{1}{2}$, $b=2$, $b'=-\frac{1}{4}$ donnent cosinus $V=-\frac{6}{21}$. Enfin, le troisième est formé par les intersections du plan $x-\frac{z}{2}=0$ avec les autres plans $x+\frac{z}{2}=0$, $y+\frac{x}{2}=0$, ces intersections ont pour équations $x=0$, $y=\frac{1}{0}z$, $x=\frac{1}{2}z$, $y=-\frac{1}{4}z$, et le $\cos V$ devient $-\frac{1}{\sqrt{21}}$, en y supposant $b=\frac{1}{0}$, $a'=\frac{1}{2}$, $b'=-\frac{1}{4}$.

Les plans du dodécaèdre pentagonal et ceux de l'octaèdre donnent par leur ensemble l'icosaèdre. On parviendra aisément à en calculer les angles, puisque l'on connaît les équations de toutes les faces de ce polyèdre.

Le trapézoèdre dérive du cube par un pointement à trois faces sur chaque angle, et comme chacune de ses faces est celle d'un décroissement sur ces mêmes angles par une soustraction double en largeur, les plans de ce polyèdre auront pour équations :

$$x\pm y\pm 2z=0.$$
$$x\pm 2y\pm z=0.$$
$$2x\pm y\pm z=0.$$

Il y aura deux espèces d'angles solides : un angle triple formé par les trois plans

$$x+y+2z=0,\ x+2y+z=0,\ 2x+y+z=0,$$

et un angle quadruple formé par les quatre plans

$$\pm x\pm y+2z=0.$$

Je me dispenserai de calculer les angles de ces polyèdres. Mon but n'est pas de donner la théorie complète de la cristallographie, mais seulement de laisser entrevoir comment on pourrait la développer au moyen des principes précédens.

2°. Si le parallélipipède est du genre de ceux que M. Haüy a nommés rhomboïdes, on a $\alpha = \beta = \gamma$, $A = B = C$. L'équation générale des décroissemens est

$$\frac{x}{m} \pm \frac{y}{n} \pm \frac{z}{p} = 0.$$

La formule qui donne l'angle de deux droites devient

$$\cos V = \frac{1 + a\alpha' + b\beta' + (ab' + ba' + b + b' + a + a')\cos\alpha}{\sqrt{1 + a^2 + b^2 + 2(ab + a + b)\cos\alpha}\sqrt{1 + a'^2 + b'^2 + 2(a'b' + a' + b')\cos\alpha}}$$

Les équations d'une perpendiculaire au plan

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 0.$$

sont

$$x = \frac{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{m\cos\alpha}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p\cos\alpha}} z,$$

$$y = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{p} + \frac{1}{n\cos\alpha}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p\cos\alpha}} z.$$

Les troncatures sur les sommets ont pour équation $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 0$; celles qui ont lieu sur

les angles latéraux sont représentées par l'une des trois équations

$$-\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 0,$$

$$\frac{x}{m} - \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 0,$$

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - \frac{z}{p} = 0.$$

L'axe du rhomboïde a pour équations $x = y = z$. Pour que les troncatures latérales lui soient parallèles, il faut que leurs équations soient satisfaites par les hypothèses $x = y = z$, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$. Si le décroissement qui donne lieu à cette troncature sur l'angle n'est pas intermédiaire, on doit avoir $n = p$; le cristal secondaire sera un prisme hexaèdre régulier si $n = 2m$; car alors ces faces seront parallèles à l'axe. Si le décroissement a lieu sur les arêtes $\frac{1}{p} = 0$, il faut alors que $m = n$ pour que le cristal secondaire soit encore un prisme hexaèdre.

Les troncatures sur les arêtes du sommet conduisent à de nouveaux rhomboïdes dont il est aisé dans tous les cas de déterminer les angles plans ou les angles de leurs faces à l'axe, au moyen des formules précédentes. Par exemple, les trois faces d'un rhomboïde secondaire peuvent être représentées par les équations

$$\frac{y}{m} + \frac{x}{n} = 0, \quad \frac{x}{m} + \frac{z}{n} = 0, \quad \frac{z}{m} + \frac{y}{n} = 0.$$

Les équations de la droite d'intersection des deux premiers plans sont $x=-\frac{m}{n}z, y=\frac{m^2}{n^2}z$; celles de l'intersection de la première et de la troisième sont pareillement $x=\frac{n^2}{m^2}z, y=-\frac{n}{m}=z.$ Si donc l'on fait $a=-\frac{m}{n}$, $b=\frac{m^2}{n^2}$, $a'=\frac{n^2}{m^2}$ $b'=-\frac{n}{m}$ dans cos V, on aura l'angle plan du rhomboïde. Dans le cas particulier où $m=n$, on a $a=-1$, $b=1$, $a'=1$, $b'=-1$ et $\cos V=\frac{2\cos\alpha-1}{3-2\cos\alpha}$.

3°. Le parallélipipède peut être encore tel que sa base repose sur les arêtes; alors deux des angles α, β, γ, seulement, sont égaux. Il peut être oblique à base rectangle, ou droit à base oblique; enfin sa base peut être un rhombe; ces cas particuliers produiront autant de simplifications dans les formules générales. Il est extrêmement rare que les parallélipipèdes soient parfaitement irréguliers.

Je me dispenserai de développer comment M. Haüy est parvenu à mesurer les angles des cristaux secondaires de la nature, et à déterminer les nombres ralatifs aux décroissemens. Il me suffira d'observer que sa méthode est applicable à toute formule générale qui donnerait les angles d'une forme secondaire quelconque en fonction de ceux de la forme primitive, et que de telles formules peuvent s'obtenir au moyen des calculs précédens.

FORMULE pour déterminer la direction et l'inclinaison d'une couche minérale, reconnue par trois trous de sonde;

PAR M. LAMÉ, élève ingénieur au Corps royal des Mines.

UN des grands caractères de la généralité d'un calcul, c'est la facilité avec laquelle on peut l'appliquer à des questions totalement différentes. Les formules qui nous ont servi dans la théorie exposée dans l'article précédent, peuvent être utiles dans toutes les questions sur les surfaces qui exigeraient que les axes fussent obliques. Pour prouver en quelque sorte cette assertion, je rapprocherai de l'application que je viens de faire de ces mêmes formules, une autre application non moins utile, mais sur un sujet bien différent.

La détermination de l'inclinaison des couches minérales par le sondage dépend de la solution de ce problème : *Déterminer l'angle avec l'horizon d'un plan dont on connaît trois points*, question qui peut se traiter de la manière suivante.

Soient A, B, C (*fig. a*, Pl. II), les projections horizontales des points donnés ou les ouvertures de trois trous de sonde; je désignerai par q, q', q'' les côtés BC, AC, AB du triangle ABC, par γ l'angle BAC, par p, p', p'' les ordonnées verticales des points donnés, ou les profondeurs des trous de sonde A, B, C. On peut prendre pour axes coordonnés les droites AB, AC, AP; car comme ce système d'axes n'annulle aucune des quantités p, p', p'', q, q', q'', la formule finale ne laissera pas que d'être symétrique, par rapport