teur général des Ponts-et-Chaussées et des Mines. Postérieurement à cette opération, le permissionnaire ne pourra faire aucun changement au niveau de ses vannes et déversoirs, sans avoir obtenu à cet effet une permission spéciale dans les formes voulues par les lois et règlemens.

Quant aux constructions relatives aux fourneaux et machines soufflantes, elles seront exécutées sous la surveillance des ingénieurs des mines. Il sera dressé procès-verbal de leur achevement, dont expéditions seront déposées aux archives de la commune et du département; il en sera donné avis au directeur général des Mines.

SUPPLÉMENT AU MÉMOIRE SUR LES MACHINES A COLONNE D'EAU,

INSÉRÉ

Dans le tome III *des Annales des Mines*, page 503;

Par M. ROUSSEL-GALLE, Ingénieur au Corps royal des Mines.

Nous avons exposé, dans ce mémoire, la théorie générale des machines à colonne d'eau à simple effet, et de celles à double effet, destinées à produire un mouvement de rotation continu. Notre objet actuel est le développement de quelques points de cette théorie, ce qui nous conduira à résoudre différens problêmes d'hydrodynamique, et à reconnaître l'erreur dans laquelle Bossut est tombé en exprimant les conditions du mouvement de l'eau dans les tuyaux de pompe. Enfin, nous compléterons la théorie des machines à double effet.

L'équation (B) qui donne la vitesse u du piston en fonction de l'espace e parcouru au bout du temps t, est $Mgde + \varphi(u)de + Kudu$

$$=Bg(h-e)de - B^2Nudu - Beudu - \frac{Bu^2de}{2} - \frac{B^3u^2de}{2Y^2}. \text{ (B)}$$

M est la somme des masses à élever, K celle des momens d'inertie de toutes les masses en mouvement à l'exception de la colonne motrice, $\varphi(u)$ représente la somme des résistances des frottemens de toute espèce et des chocs qui s'opèrent à chaque solution de continuité. L'effet utile de la machine est Mge, et sa valeur déduite de l'équation précédente est :

$$Mge = Bge - \frac{Bge^2}{2} - \frac{B^2Nu^2}{2} - \frac{Ku^2}{2} - Bu^2e - \int de\,\varphi(u).$$

Je néglige le terme $\frac{B^3u^2de}{2Y^2}$ toujours très-petit.

On a vu que l'expression de la résistance occasionnée par les robinets, était de la forme ΣRu^2; quant à son élévation absolue, elle doit être faite ainsi : si on désigne par ρ l'air de l'ouverture d'un robinet, ou plutôt la plus petite section de la veine contractée que l'on sait, d'après l'expérience, être généralement les 62 centièmes de cette aire, par b la section du tuyau auquel le robinet est adapté, $\frac{Bu}{\rho}$ sera la vitesse du fluide à l'orifice, et $\frac{Bu}{b}$ sera sa vitesse dans le tuyau : or, chaque tranche Bde perdant

brusquement à sa sortie du robinet la vitesse

$$\frac{Bu}{\rho} - \frac{Bu}{b} = Bu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right),$$

la perte correspondante de force vive est $B^2u^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right)^2 Bde$; on aura un résultat semblable pour chaque robinet, et, en général, pour chaque solution de continuité où le fluide perdra tout-à-coup une partie de sa vitesse, en passant d'un tuyau dans un autre d'un plus grand diamètre. Ainsi, le signe Σ désignant l'ensemble de ces résultats, $\frac{\Sigma B^3u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right)^2 de$ sera la différentielle de la quantité d'action perdue par suite des changemens brusques de vitesse, quantité dont on trouvera par conséquent la valeur en remplaçant u par son expression en e, et étendant l'intégration à la quantité Be d'eau dépensée par chaque course du piston. Cette force joue un rôle important dans les machines hydrauliques, et on ne doit jamais la négliger, si on veut avoir une mesure précise de leurs effets. Nous verrons plus bas, par un exemple, combien elle diminue l'effet utile, pour peu que soit considérable la différence entre les diamètres des tuyaux et ceux des orifices des robinets.

Outre cette résistance, il faudra, dans les machines à double effet, avoir égard à celle que le moteur doit vaincre pour faire sortir le fluide du cylindre principal, et dont la valeur est

$\frac{Beu^2}{2}\cdot\frac{B^2}{\rho'^2}$; ρ' étant l'ouverture de sortie, et le mouvement étant supposé uniforme. Je ferai remarquer ici qu'on pourra négliger la perte relative au choc de l'eau contre les angles des tuyaux, lorsque ces angles seront adoucis par des courbes, ou lorsque la vitesse y sera très-petite.

Nous avons fait observer qu'au moyen de la valeur de u^2 et de la formule $u = \frac{de}{dt}$, on pourrait trouver le temps de la levée du piston. Mais il sera plus simple et tout aussi exact de calculer seulement la vitesse moyenne en divisant, comme nous l'avons indiqué, la longueur e du cylindre principal, en un nombre n de parties égales et assez petites pour que, dans chacune, le mouvement puisse être considéré comme uniforme, et réduisant ensuite en nombre l'expression correspondante de u; car la vitesse moyenne sera alors, en désignant par U, U', U'', etc., les valeurs successives de u,

$$\frac{U + U' + U'' + \text{etc.}, U^{(n)}}{n}.$$

La théorie des machines à colonne d'eau, à simple effet, s'applique immédiatement à celles à double effet, dont la colonne motrice serait partagée en deux par le cylindre principal, comme, par exemple, dans la *fig.* 14, Pl. II, et qui ne seraient pas munies d'un volant. La partie inférieure plonge dans un réservoir, et le cylindre étant ouvert par en bas, le piston remonte en vertu de la pression mesurée par la hauteur variable ab, qui ne doit point excéder celle de 10^{m},4 ou 32 pieds.

S'il s'agit d'une machine à double effet, à laquelle soit adapté un volant, comme celle employée par M. Boüesnel, à l'extraction des minerais de plomb à Védrin, près de Namur, le mouvement du piston deviendra sensiblement uniforme, et on pourra négliger les termes en du, dans l'équation (B), ce qui donnera :

$$Mg + \varphi(U) = Bgh - \frac{BU^2}{2} - \frac{B^3U^2}{2Y^2}.$$

On obtient ici pour U^2 la même valeur que fournirait l'équation

$$u^2 = \frac{A}{C'} - \frac{A}{C'}\left(\frac{1}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}},$$

laquelle convient, comme nous l'avons vu, aux machines à mouvement variable, et dont la colonne conserve la même hauteur. En effet, si on néglige le frottement de l'eau contre le cylindre principal, et si on suppose qu'aussitôt arrivé à l'extrémité de sa course, le piston revienne subitement en arrière avec toute sa vitesse acquise, ce qui a lieu à fort peu près avec un volant, il se mouvra suivant la même loi que s'il parcourait toujours dans le même sens, un cylindre indéfini, imprimant à la quantité d'eau Bde la même vitesse que celle qu'elle posséderait à la sortie de la machine à mouvement alternatif. La pression diminuant sans cesse, il viendra un terme où elle fera équilibre aux résistances, et c'est alors que le mouvement sera uniforme. Ainsi, bien que l'équation précédente n'ait lieu que pour les petites valeurs e, la limite de la vitesse variable s'en déduit rigoureusement, parce que la masse d'eau poussée par le piston étant constante, la résistance est indépendante de l'espace parcouru.

Dans le cas particulier qui nous occupe, trois robinets consomment constamment une partie de la force vive du moteur, savoir : celui qui sert à régler la vitesse de la machine, et ceux qui entretiennent le mouvement ;

$\Sigma\frac{B^3u^2e}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{b}\right)^2$ sera donc ici composé des trois termes :

$$\frac{B^3u^2e}{2}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{b}\right)+\frac{B^3u^2e}{2}\left(\frac{1}{\rho'}-\frac{1}{B}\right)^2+\frac{B^3u^2e}{2\rho'^2},$$

ρ désigne l'orifice du premier robinet, ρ' celui de chacun des deux autres ; et b la section du tuyau montant.

En supposant, comme dans la machine de M. Bouësnel, que la hauteur de la colonne soit de 250 pieds, que l'orifice $\rho=\frac{1}{5}b$, $\rho'=b$, $\frac{B}{b}=4$, et $u=2^{p},12$, on trouvera, après les calculs et la division, par la force accélératrice de la pesanteur qui, parce que nous prenons la seconde pour unité des temps, est de 30 pieds :

Pour le premier terme...	$19^{p},11$ Be
Pour le second.........	$0,66$ Be
Pour le troisième......	$1,86$ Be
TOTAL......	$21^{p},63$

La puissance étant Be, 250 pieds, on voit que dans cette machine il y a sur la hauteur de la colonne une perte de plus d'un douzième, uniquement due aux changemens de vitesse par les ouvertures des robinets, et cela abstraction faite de la contraction de la veine fluide, dont l'influence pourrait tripler ces résultats.

La théorie des pompes en mouvement est la même que celle des machines à colonne d'eau proprement dites. Ainsi, par exemple, l'effet produit par une force accélératrice constante, appliquée à l'extrémité de la tige d'un piston dont la base est M, et le poids P qui se meut avec la vitesse u, et élève à la hauteur E une colonne d'eau H, sera pour le mouvement uniforme,

$$FE=MgHE+PE+\frac{M^3u^2E}{2}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{M}\right)^2+\frac{Mu^2E}{2}.$$

Le troisième terme est la moitié des forces vives perdue par suite du choc des tranches du fluide à leur entrée dans le corps de pompe par l'ouverture K.

La force F et la quantité P étant respectivement représentées par le poids des colonnes d'eau dont la base serait M, et les hauteurs z et a, on aura $Mgz=F$, $Mga=P$, et par conséquent, $z=H+a+\frac{u^2}{2g}\left(\frac{M}{K}-1\right)^2+\frac{u^2}{2g}$.

Bossut trouve $z=H+a+\frac{u^2}{2g}+X\left(\frac{M^2-K^2}{M^2}\right)$;

X est l'excès de la hauteur de la colonne d'eau qui fait équilibre au poids de l'atmosphère sur celle de la colonne inférieure au piston et qui se meut par l'intermédiaire de ce poids.

D'après ce résultat, la force motrice serait variable, dans le cas même du mouvement uniforme, et dans la pratique il serait nécessaire, suivant Bossut, de prendre la valeur de z moyenne entre celles qui correspondraient aux valeurs extrêmes de X.

Pour arriver à l'équation du mouvement ascensionnel du piston, ce savant est parti d'un faux principe. Il dit, page 573 du tome Ier. de son Traité d'hydrodynamique, que si le piston n'opposait point de résistance à l'eau qui le suit, la hauteur due à la vitesse de l'eau, à l'orifice K, serait X; et conséquemment $\frac{K^2X}{M^2}$ serait de même la hauteur due à la vitesse du fluide dans le corps de pompe, les vitesses étant en raison inverse des sections K et M. Donc, puisque l'eau prend la vitesse du piston, et que, d'un autre côté, la pression qui agit sous lui est évidemment égale au produit de la gravité par la différence des hauteurs $\frac{K^2X}{M^2}$ et $\frac{u^2}{2g}$, il s'ensuit que cette pression sera dans une position quelconque, $gM\left(\frac{K^2X}{M^2}-\frac{u^2}{2g}\right)$. A cette force, qui est celle dont l'élévation est fautive, comme

nous allons le voir, Bossut joint ensuite la force motrice F d'une part, et de l'autre, les forces opposées à celles-là, savoir : le poids du piston, celui de la colonne d'eau qui lui est superposée, et enfin le poids de l'atmosphère, et il arrive à l'équation différentielle

$$(a+h)udu=-gdX\left(z+\frac{K^2X}{M^2}-\frac{u^2}{2g}-a-h-X\right).$$

Dans le premier membre, sont les masses à mouvoir, et dans le second, les forces accélératrices; on en tire lorsque $du=0$, ou que le mouvement est uniforme, la valeur que nous avons rapportée plus haut,

$$z=a+h+\frac{u^2}{2g}+X-\frac{K^2X}{M^2}. \quad (1)$$

Si l'expression $gM\left(\frac{K^2X}{M^2}-\frac{u^2}{2g}\right)$ est exacte, elle doit donner la valeur de la pression pour tous les cas possibles. Or, lorsque la vitesse u du piston est nulle ou très-petite, on sait que cette force est rigoureusement égale à gMX, et non point à $g\frac{MK^2X}{M^2}$, comme le donnerait la formule précédente, laquelle se réduira ainsi à $gMX-\frac{Mu^2}{2}$, et sera telle qu'on l'obtiendrait de la valeur générale de la pression exercée par une colonne d'eau sur un piston en mouvement; le terme $X-\frac{K^2X}{M^2}$ disparaîtra donc de l'équation (1), et il ne restera que $z = a + h + \frac{u^2}{2g}$, résultat incomplet auquel il manque l'expression de la résistance due aux vitesses perdues par les tranches fluides lorsqu'elles passent du tuyau d'aspiration dans le corps de pompe.

L'équation (B) représente généralement le mouvement d'un fluide incompressible dans un système de tuyau ou de vases qui, à cause de la supposition du parallélisme des tranches, doivent avoir exactement, ou à-peu-près, la forme cylindrique ou prismatique. Soit, par exemple, un vase divisé en compartimens par des cloisons horizontales b, b', b'', percées des ouvertures ρ, ρ', ρ'', la vitesse u d'écoulement par l'orifice extérieur B, lorsque l'uniformité du mouvement est établie, sera donnée par cette équation, dans laquelle on fera, outre $du = 0$, $M = 0$; on aura donc, en négligeant le terme relatif aux frottemens, et remarquant qu'il se fait à la sortie de chaque orifice ρ, une perte de vitesse

$$Bu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right),$$

$$\frac{B^3u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right)^2 + \frac{B^3u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{b'}\right)^2 + \frac{B^3u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho''} - \frac{1}{b''}\right)^2$$
$$= Bgh - \frac{Bu^2}{2} - \frac{Bu^2}{2Y^2}.$$

Si les orifices sont très-petits relativement aux sections b, b', b'' du vase, on négligera les rapports $\frac{B}{b}$, $\frac{B}{b'}$, $\frac{B}{b''}$ et $\frac{B}{Y}$, et l'équation précédente deviendra :

$$\frac{B^3u^2}{2\rho^2} + \frac{B^3u^2}{2\rho'^2} + \frac{B^3u^2}{2\rho''^2} = Bgh - \frac{Bu^2}{2},$$

d'où

$$u^2 = \frac{2gh\rho^2\rho'^2\rho''^2}{\rho^2\rho'^2\rho''^2 + B^2\rho'^2\rho''^2 + B^2\rho^2\rho'^2 + B^2\rho^2\rho''^2},$$

résultat conforme à celui que Bossut a trouvé en suivant une autre méthode. Si les diaphragmes sont très-minces, ou que l'effet de la contraction n'ait point été corrigé par l'évasement des orifices, il faudra au lieu de ρ, ρ', etc., mettre 0,62 ρ, 0,62 ρ'.

Supposons maintenant que le vase soit simple, et que le fluide s'échappe librement par un orifice P qui ne soit pas très-petit par rapport à la section supérieure Y, l'équation (B) se réduira, dans l'hypothèse du mouvement uniforme, à la suivante :

$$0 = gh - \frac{u^2}{2} \pm \frac{\rho^2u^2}{2Y^2}.$$

Le signe positif se rapporte au cas où les tranches $Y\,dz$, qui réparent les pertes du vase, sont déjà animées de la vitesse $\frac{Bu}{Y}$, et le signe négatif au cas où elles acquièrent cette vitesse en vertu de leur adhérence aux tranches inférieures; on aura donc pour la vitesse d'écoulement, $u = \sqrt{\frac{2gh}{1 \mp \frac{\rho^2}{Y^2}}}$.

L'effet et la vitesse des machines doubles, appliquées à l'épuisement et non munies de volans, telles que celles décrites dans le grand et bel ouvrage de M. Héron de Villefosse, se calculeront aussi par la théorie que nous avons exposée; mais si on veut analyser la chose avec toute la rigueur mathématique, on remarquera que dans ces machines le piston arrivant à l'une des extrémités du cylindre, reçoit le choc de la colonne motrice, dont la quantité de mouvement se répartit alors conformément à la loi du choc des corps non élastiques, entre cette colonne, le piston, le balancier et la masse d'eau à élever. Le mouvement s'accélère ensuite d'une extrémité à l'uatre, suivant les lois que nous avons déterminées; mais bientôt cette accélération est à son terme, et cela, lorsque la différence entre la vitesse du piston à l'instant du choc, et celle qu'il a immédiatement après, dans le sens opposé, est précisément égale à l'accroissement de cette dernière pendant la demi-oscillation. Si donc on nomme V, la vitesse du piston au commencement de sa course, et lorsque les oscillations sont d'égale durée, u celle qu'il possède à un instant quelconque, la relation de u à V s'obtiendra en déterminant la constante de l'intégrale de l'équation

$$de(C'S - A + A'e) = dS\left(\frac{C+Be}{2}\right),$$

de manière qu'on ait à la fois $u = V$ et $e = 0$, ce qui donnera, dans le cas où la hauteur de la colonne ne varie pas :

$$u^2 = \frac{A}{C'} - \left(\frac{A}{C'} + V^2\right)\left(\frac{1}{1+\frac{Be}{2C}}\right)^{\frac{2C'}{B}}.$$

D'un autre côté, le moteur étant incompressible, sa quantité de mouvement est la même que celle d'un cylindre d'eau qui aurait le piston pour base, et, pour la longueur, celle de la colonne motrice; ainsi, M étant la masse de ce cylindre, U la plus grande valeur de u, L et L' les longueurs des bras du balancier, K la somme des momens d'inertie du balancier, du piston et de la masse d'eau à élever, on aura entre U et V l'équation suivante, $V = U\,\frac{(ML^2 - K)}{ML'^2 + K}$, fournie par la condition de l'équilibre autour de l'axe fixe du balancier, entre les quantités de mouvement effectives qui restent après le choc, et celles qui avaient lieu auparavant. Cette équation n'étant que du premier degré en V et en U, se combinera très-facilement avec la précédente; et, par leur moyen, on connaîtra V dont la valeur substituée dans celle-ci, donnera u en fonction de e et de quantités connues. On pourra donc alors calculer, comme ci-dessus, la vitesse moyenne par les différentes valeurs de u correspondantes à celles de e, et même il suffira des deux valeurs extrêmes et de celle qui se rapporte au point milieu de l'axe du cylindre principal.

Pour avoir l'effet utile, il faudra, dans l'expression générale $Mge = Bgh - B^2h\int udu - K\int udu - B\int u^2de - \int de\,\varphi(u)$, prendre l'intégrale $\int udu$ entre les limites $u = V$ et $u = U$, et il en résultera :

$$Mge = Bgh - (BN + K)\left(\frac{U^2 - V^2}{2}\right) - B\int u^2de - \int de\,\varphi(u).$$

Nous avons fait voir que

$$\varphi(u) = R + \Sigma \pi D l \left(0{,}003416 \frac{B^2 u^2}{b^2}\right)$$

$$+ \Sigma \frac{B^3 u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{b}\right)^2 de.$$

Si nous n'avons rien dit encore du régulateur des machines à colonne d'eau, considéré comme résistance, c'est que la perte qu'il produit sur l'effet est en général très-petite et la moins importante de toutes celles dont nous avons tenu compte précédemment. A l'appui de cette assertion, je citerai les régulateurs des machines représentées sur la Planche XLIII et sur le com-compartiment inférieur de la Planche XLIV de l'Atlas de la Richesse minérale, qui sont de petits pistons mus immédiatement par la colonne d'eau ; ils consomment, l'un le vingt-huitième, et l'autre le quarante-quatrième de la qnantité d'eau dépensée par chaque course du grand piston, ainsi qu'on peut s'en assurer en comparant les volumes des petits cylindres de ces régulateurs aux volumes des cylindres principaux.

Telle me paraît être la théorie complète des machines à colonne d'eau. Il est important de remarquer que les diverses résistances qu'il faut y considérer étant, ou constantes ou proportionnelles au carré de la vitesse, nos formules, qui sont établies sur cette loi et sur les vrais principes de la mécanique, conduiront à des résultats conformes à l'expérience, lorsque celle-ci aura fourni toutes les données du calcul.

ANALYSE
DU
FER TITANÉ EN COUCHE, DU BRÉSIL,
ET DE QUELQUES AUTRES MINÉRAUX DU MÊME GENRE ;

PAR M. P. BERTHIER,

INGÉNIEUR AU CORPS ROYAL DES MINES.

PARMI les minéraux que M. l'ingénieur Montlevade a recueillis au Brésil, et qu'il a envoyés à la collection de l'Ecole des Mines, il en est un étiqueté *minerai de fer*, dont l'aspect diffère beaucoup de celui qu'affecte ordinairement ce genre de minerai. Il a paru d'autant plus intéressant de l'examiner chimiquement, qu'il se trouve en masses très-considérables. Selon M. Montlevade, il constitue des montagnes ou des bancs très-épais et très-étendus qui alternent avec des roches de formation intermédiaire. L'expérience ayant démontré que ce minéral est composé d'oxide de fer et d'oxide de titane, on a cru intéressant de réunir, dans cet article, l'analyse de quelques autres minéraux qui sont formés des mêmes élémens.

Fer titané du Brésil.

Le fer titané du Brésil est en masses com-