mations supérieures ; que les minerais de fer en grains ont une structure pisolithique tout-à-fait semblable à celle des minerais oolithiques en roche ; enfin que les calcaires supérieurs du terrain jurassique empâtent fréquemment des grains de fer oxidé hydraté, il paraît naturel de conclure que les deux formations des minerais en roche et en grains ont eu lieu, à des époques très-rapprochées, dans des circonstances à-peu-près semblables et par suite de causes analogues, et qu'en conséquence elles appartiennent à un seul et même terrain. Telles sont les considérations qui me portent à regarder comme formant le quatrième étage du calcaire jurassique, le dépôt des minerais de fer en grains de la Franche-Comté, qui a été considéré jusqu'ici comme étant une formation tertiaire ou d'alluvion.

RECHERCHES

Sur le mouvement de l'eau, en ayant égard à la contraction qui a lieu au passage par divers orifices, et à la résistance qui retarde le mouvement le long des parois des vases ;

PAR M. EYTELWEIN.

Mémoires lus, le 8 novembre 1810 et le 17 octobre 1811, à l'Académie de Berlin, et imprimés dans le Recueil de cette Académie, années 1814 et 1815, p. 137 et 178 ;

Traduit de l'allemand (1) par M. LEJEUNE DIRICHLET, en avril 1823.

(Premier Mémoire.)

§ I^er.

Nous ne manquons pas de recherches générales faites sur le mouvement de l'eau d'après certaines suppositions ; nous manquons beaucoup plus d'expériences qui soient assez exactes et assez complètes pour qu'on puisse conclure, par l'accord de l'expérience avec les résultats déduits des principes reconnus, que dans ces recherches on n'a négligé aucune des circonstances nécessaires pour établir une formule généralement applicable. Dans les recherches qui suivent, on considérera un fluide le moins idéal possible, jouissant des propriétés de l'eau, qui ont le plus d'influence sur le mouvement de ce liquide. Nous aurons égard à l'adhérence des molécules de l'eau, tant entre elles qu'avec les parois du vase dans lequel le mouvement a lieu, et, de plus, à la contraction qui se fait au pas-

(1) Ce mémoire a été indiqué par M. Lacroix au traducteur, qui suivait alors les cours de la faculté des sciences, et la traduction a été faite sous les yeux de M. Hachette.

sage dans les rétrécissemens subits d'un vase, la grande influence de ces circonstances sur le mouvement étant assez connue. Ce n'est qu'après avoir trouvé, d'après ces suppositions qui paraissent nécessaires, des résultats généraux sur le mouvement de l'eau, qu'on pourra les comparer avec les expériences connues, pour voir comment et avec quelles modifications on peut appliquer la formule générale à des cas particuliers. Parmi les tentatives récentes qui ont pour objet de faire voir comment les résultats calculés *à priori* pourraient être mis d'accord avec les expériences connues, on doit citer les *Recherches sur la théorie des eaux courantes,* par M. de Prony (Paris, 1804); mais on verra qu'on n'a pas eu égard, dans cette théorie, à la contraction des filets d'eau, et nous montrerons qu'en établissant l'expression générale pour le mouvement, on a négligé un terme essentiel de la formule (1).

§ II.

Supposons que la masse d'eau B'B'F'F' (Pl. XII, *fig.* 1) se meuve dans le vase A'A'*aa*, dont la ligne centrale est ABMEF, et que depuis l'origine du mouvement jusqu'à la fin du temps t, cette masse, sans augmentation ni diminution, soit parvenue de la position A'A'E'E' en B'B'F'F'. On suppose également que la vitesse soit constante dans chaque section perpendiculaire à la ligne centrale, et qu'il n'y ait pas de rétrécissement subit qui puisse rompre la continuité du mouvement.

Soit l'aire de la première section B'B' = W; son contour P; la vitesse de l'eau, dans cette section V; la longueur de la ligne centrale.......... S; l'ordonnée DB à l'axe horizontal DPG.......... y; les quantités analogues pour la section F'F' qui passe par le point F, sont respectivement w, p, v, s, y', et pour la section M'M', passant par un point quelconque M, respectivement $\omega, \psi, \sigma, y''$, l'abscisse correspondante à cette ordonnée y'', étant AP ou x. Les trois sections M'M', F'F, B'B' sont soumises à l'action de trois pressions normales dirigées suivant les tangentes à ligne centrale Mm, Ff, Bb. Nous supposons ces pressions égales à celles de trois colonnes d'eau, dont les hauteurs respectives seraient q'', q', q, et qui auraient pour bases les sections mêmes. Cela posé, l'élément M'M'$m'm'$ $= \omega d\sigma$ et la pression normale de la masse B'B'M'M' contre M'M' $= \gamma\omega q''$, γ désignant le poids d'un pied cube d'eau; la pression normale de la tranche élémentaire M'M'$m'm'$ contre la section $m'm'$ est donc $\gamma\omega dq''$. Du poids $\gamma\omega d\sigma$ de l'élément M M m m naît, dans la direction Mm, une force motrice qui a pour expression

$$\gamma\omega d\sigma\,\frac{mo}{Mm} = \gamma\omega d\sigma\,\frac{dy''}{d\sigma} = \gamma\omega dy''.$$

La seule partie de cette force qui produit du mouvement est celle qui n'est employée ni à presser l'eau qui est en avant de la section M'M', ni à vaincre les obstacles du mouvement; mais la pression qui doit être appliquée à l'eau en mouvement en avant de la section M M' étant $\gamma\omega dq''$, il ne reste, si l'on n'a pas égard aux obstacles, que la force $\gamma\omega dy'' - \gamma\omega dq$. Mais il naît de l'adhérence des molécules de l'eau, tant entre elles qu'avec les parois du vase, une résistance,

(1) Voyez les observations de M. de Prony, *Recueil des* [illegible]*drauliques*, septembre 1825.

puisqu'il faut une certaine force pour séparer les molécules d'eau des parois, ou des molécules qui adhèrent plus à ces parois qu'aux molécules d'eau en mouvement.

Cette résistance est d'autant plus considérable pour une tranche $M'M'm'm'$, que la surface $\varphi d\sigma$ est plus grande. La relation entre la résistance et la vitesse ψ ne pouvant être déterminée que par l'expérience, nous supposerons que la résistance soit une fonction $f(\psi)$ de la vitesse ψ, de manière que la résistance pour la tranche élémentaire sera exprimée par le produit $\gamma\varphi d\sigma f(\psi)$, la quantité $\gamma\varphi d\sigma$ étant le poids de la petite couche de la tranche $M'M'm'm'$ en contact avec les parois.

Pour voir, indépendamment de l'expérience, quelle pourrait être la forme de $f(\psi)$, il faut remarquer que le nombre des molécules qui viennent en contact avec les parois est d'autant plus grand que le mouvement est plus rapide, et que, par conséquent, $f(\psi)$ devra contenir un terme dans lequel ψ est à la première puissance. Non-seulement le nombre des molécules qui doivent être détachées, est d'autant plus grand que la vitesse est plus considérable; mais il faut encore que chaque molécule soit détachée dans un temps plus court si la vitesse augmente. La résistance dépend donc aussi du carré de la vitesse, et $f(\psi)$ devra contenir un terme de ce genre. D'après cela, on peut poser $f(\psi) = B\psi + B'\psi^2$, les constantes B, B' devant être déterminées par des expériences suffisamment exactes. Cette forme de $f(\psi)$, à laquelle nous avons été conduits par des considérations générales, s'accorde très-bien avec les résultats que donnent les expériences

faites par Coulomb, dans la vue de déterminer cette résistance (*Mémoires de l'Institut*, sciences mathémathiques et physiques, tome III. Paris, an IX (1800), pages 246 et 305.) Ce savant a trouvé encore que la force nécessaire pour rompre l'adhérence est sensiblement la même pour des pressions différentes et des corps solides de nature différente : c'est pourquoi ces circonstances seront négligées ici.

Il suit de ce qui précède, que la force librement employée pour faire mouvoir la tranche élémentaire $M'M'm'm' =$

$$\gamma\omega dy'' - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma\, f(\psi),$$

et par conséquent la force accélératrice

$$= \frac{\gamma\omega dy'' - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma\, f(\psi)}{\gamma\omega d\sigma} = \frac{dy'' - dq''}{d\sigma} - \frac{\varphi}{\omega} f(\psi).$$

La vitesse ψ est une fonction du temps t et de l'espace parcouru σ. Si t augmente de dt, σ croîtra de ψdt, parce que la tranche $M'M'm'm'$ parcourt dans le temps dt un espace $Mn = \psi dt$: on a par conséquent, pour la détermination des différentielles partielles de ψ,

$$d\psi = \psi dt \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + dt \left(\frac{d\psi}{dt}\right).$$

Désignant par g l'espace parcouru librement par un corps grave dans la première seconde, on trouve pour la force accélératrice due à la tranche élémentaire $M'M'm'm'$,

$$\frac{d\psi}{2g\,dt} = \frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right);$$

par conséquent

$$\frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)+\frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)=\frac{dy''-dq''}{d\sigma}-\frac{\varphi}{\omega}f(\psi), \text{ ou}$$

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots\ 4gdq'' =$$

$$4gdy''-2\psi d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)-2d\sigma\left(\frac{d\psi}{dt}\right)-4g\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi).$$

§ III.

La quantité d'eau qui s'écoule par chacune des sections M'M', F'F' dans des temps égaux étant constante, $\psi\omega = vw$. Donc

$$\psi = \frac{vw}{\omega} \text{ : d'où } \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)=\left(\frac{d\frac{vw}{\omega}}{d\sigma}\right).$$

Si σ change, ω doit changer dans l'expression $\frac{vw}{\omega}$, parce que, pour le même temps, vw reste invariable; par conséquent, dans ce cas,

$$d\frac{vw}{\omega} = -\frac{vw}{\omega^2}d\omega.$$

Donc

$$d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) = -\frac{vw}{\omega^2}d\omega, \text{ et enfin } 2\psi d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) =$$

$$\frac{2vw}{\omega}\times -\frac{vw}{\omega^2}d\omega = -2v^2w^2\frac{d\omega}{\omega^3}.$$

Si t change, les sections w, ω restant constantes, la vitesse v doit changer; c'est pourquoi

$$d\left(\frac{vw}{\omega}\right)=\frac{w}{\omega}dv \text{ : donc } \left(\frac{d\psi}{dt}\right)=\frac{w}{\omega}\frac{dv}{dt},$$

et l'on obtient par l'équation (I)

$$4gdq'' = 4gdy'' + 2v^2w^2\frac{d\omega}{\omega^3} - 2w^2\frac{dv}{dt}\frac{d\sigma}{\omega} -$$

$4g\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi)$, dont l'intégrale est

$$(\mathrm{II})\ 4gq'' = 4gy'' - \frac{v^2w^2}{\omega^2} - 2w\frac{dv}{dt}\int\frac{d\sigma}{\omega} -$$

$$4g\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f\psi + \text{const.}$$

1°. Si $q''=q$, y'' sera $= y$, $\sigma = s$, $\omega = w$, $\varphi = \mathrm{P}$ et $\psi = \mathrm{V}$, et supposons que dans ce cas on ait

$$\int\frac{d\sigma}{\omega} = \mathrm{N}', \text{ et } \int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi) = \mathrm{R}'.$$

2°. Soit $q''=q'$, $y''=y'$, $\sigma = s$, $\omega = w$, $\varphi = p$ et $\psi = v$, et supposons, dans ce cas,

$$\int\frac{d\sigma}{\omega} = \mathrm{N}'', \text{ et } \int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f(\psi) = \mathrm{R}'',$$

l'équation (II) deviendra

$$4gq = 4gy - \frac{v^2w^2}{\mathrm{W}^2} - 2w\frac{dv}{dt}\mathrm{N}' - 4g\mathrm{R}' + \mathrm{C}$$

$$4gq' = 4gy' - v^2 - 2w\frac{dv}{dt}\mathrm{N}'' - 4g\mathrm{R}'' + \mathrm{C},$$

ou

$$4g(q - q' - y + y') = \frac{\mathrm{W}^2 - w^2}{\mathrm{W}^2}v^2 +$$

$$2w\frac{dv}{dt}(\mathrm{N}'' - \mathrm{N}') + 4g(\mathrm{R}'' - \mathrm{R}').$$

Les intégrales N'' et R'' doivent être tellement prises qu'elles s'évanouissent pour $\sigma = 0$, et qu'elles obtiennent leurs valeurs complètes pour $\sigma = \mathrm{ABMF} = s$; quant aux intégrales N' et R', elles doivent s'évanouir pour $\sigma = 0$, et devenir complètes pour $\sigma = AB = S$. On obtient donc pour $N'' - N'$ et $R'' - R'$ les valeurs complètes de B en F, qu'on trouverait encore en déterminant $\int \frac{d\sigma}{\omega}$ et $\int \frac{\phi d\sigma}{\omega} f(\psi)$, de manière à s'évanouir pour $\sigma =$ AB et à être complètes pour σ = ABMF. Dans cette supposition, on a

$$\text{(III)}\ 4g\,(q - q' - y + y') = \frac{W^2 - w^2}{W^2} v^2 + 2w \frac{dv}{dt} \int \frac{d\sigma}{\omega} + 4g \int \frac{\phi d\sigma}{\omega} f(\psi),$$

où il faut bien remarquer que les intégrales doivent être déterminées de manière qu'elles s'évanouissent pour $\sigma = AB = S$, et qu'elles soient complètes pour $\sigma = ABMF - s$.

§ IV.

Si l'on entend par *moment d'inertie* d'une masse en mouvement le produit de cette masse par le carré de sa vitesse, on aura, pour le moment d'inertie de la tranche élémentaire en M'M', $\psi^2 \omega d\sigma$, par conséquent, pour le moment d'inertie de la masse totale, $\int \psi^2 \omega d\sigma$; de plus, puisque v est la vitesse de la tranche $F'F' = w$, $\frac{\int \psi^2 \omega d\sigma}{v^2}$ deviendra la masse réduite d'après la théorie du moment d'inertie à l'aire $FF' = w$. Mais $\psi^2 \omega d\sigma = \psi^2 \omega^2 \frac{d\sigma}{\omega}$, et parce que, pour le même temps, $\psi\omega = vw$ est invariable, on obtient

$$\int \psi^2 \omega d\sigma = \psi^2 \omega^2 \int \frac{d\sigma}{\omega}.$$

Il résulte de (III), en y posant

$$\int \frac{\phi d\sigma}{\omega} f(\psi) = R$$

$$\frac{dv}{2\,gdt} = \frac{q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g} - R}{w \int \frac{d\sigma}{\omega}} = \frac{\gamma w \left[q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g} - R \right]}{\gamma \frac{v^2 w^2 \int \frac{d\sigma}{\omega}}{v^2}},$$

ou

$$\text{(IV)}\ \frac{dv}{2gdt} = \frac{\gamma w \left[q - q' - y + y' - \frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g}\ R \right],}{\frac{V \cdot s \int \psi^2 \omega d\sigma}{v^2}}$$

ou si l'on pose

$$\frac{dv}{2gdt} = \frac{P}{M},$$

$\frac{dv}{2\,gdt}$ sera la force accélératrice de l'eau, et si on nomme P la force motrice et M la masse en mouvement, on obtient, comme pour les corps solides, la force accélératrice, en divisant la force motrice par la masse. Pour désigner ces expressions d'une manière plus déterminée, que l'on nomme $\frac{W^2 - w^2}{W^2} \cdot \frac{v^2}{4g}$ la hauteur de pression qui est nécessaire pour produire la vitesse v dans la dernière tranche F'P'; alors :

1°. La force motrice P sera égale au poids d'une colonne d'eau, dont la base est la section w, et dont on trouve la hauteur en soustrayant de la somme algébrique de toutes les hauteurs de pression les deux hauteurs dont l'une est nécessaire pour produire la vitesse v, l'autre pour vaincre les obstacles qui s'opposent au mouvement près des parois du vase.

2°. On trouvera la masse M en mouvement, en réduisant toute l'eau en mouvement par la théorie du moment d'inertie à la vitesse v de la section antérieure ω. En appliquant convenablement cette proposition, on facilite beaucoup les recherches hydauliques les plus compliquées. On voit encore sans peine qu'on peut appliquer ces considérations à toute autre section que l'antérieure, en faisant les modifications convenables.

§ V.

Si on suppose dans le vase $A'A'M'M'aa$ (*fig.* 1) une affluence constante en $A'A'$, telle que la section en $A'A'$ reste invariable, mais que la section antérieure $F'F'$ se trouve encore en dedans du vase, on aura, en posant la section $A'A' = A$, $W = A$, $y = 0$, et d'après l'équation (III)

$$(V)\ 4g\,(q - q' + y) = \frac{A^2 - w^2}{A^2} v^2 + 2\omega \frac{dv}{dt} \int \frac{d\sigma}{\omega} + 4g\,R.$$

Si l'eau s'écoule par l'ouverture $F'F'$ et si l'affluence est constante, $y' = FG = h$ sera une constante. Aussitôt que le mouvement arrive à l'état de persévérance, la vitesse v, dans la section $F'F'$, est invariable : donc $dv = 0$. Si on pose alors l'aire d'orifice d'écoulement $F'F' = a$, on a aussi $\omega = a$; par conséquent

$$(VI)\ 4g\,(q - q' + h) = \frac{A^2 - a^2}{A^2} v^2 + 4g\,R,$$

et si $q = q'$, ou si les hauteurs correspondantes aux forces qui agissent à l'entrée et à la sortie de l'eau sont égales

$$(VII)\ 4gh = \frac{A^2 - a^2}{A^2} v^2 + 4g\,R.$$

§ VI.

Supposons que le vase $A'A'B'B'$ (*fig.* 2), qui reste plein jusqu'en $A'A'$ par une affluence constante, ait un rétrécissement subit près de l'ouverture d'écoulement, de manière que l'eau ne s'écoule pas dans toute l'étendue $B'B'$, mais seulement par l'orifice bb. Posons la section $A'A' = A$, l'ouverture $bb = a$, la hauteur de pression $CH = h$ et la vitesse de l'eau qui s'écoule dans la section $bb = c$. Le rétrécissement subit romprait la continuité du mouvement de l'eau, parce que la tranche $B'B'$ devrait passer entièrement dans la tranche bb, si dans le mouvement effectif, il n'existait pas dans les angles B', B', de l'eau stagnante, comme on s'en assure facilement par l'expérience : c'est pourquoi on peut admettre que, dans ce cas, la continuité n'est pas rompue ; mais les expériences, qui seront bientôt citées, prouvent que, selon la différence de l'ouverture d'écoulement, la vitesse de l'eau qui passe est diminuée d'une certaine quantité par la contraction du filet d'eau : c'est pourquoi l'équation (VI) donnerait une vitesse trop considérable si elle était employée pour la détermination de la vitesse effective v dans l'ouverture bb. Si on posait donc $\mu v = c$, la constante μ, qui serait moindre que l'unité, étant déterminée par l'expérience pour chaque ouverture d'écoulement, l'équation resterait la même, en substituant $\frac{c}{\mu}$ à la place de v. Mais cette substitution entraîne celle de $f\left(\frac{\psi}{\mu}\right)$ à la place de $f(\psi)$ dans R. On a donc généralement, dans les hypothèses précédentes, pour une ouverture d'écoulement quelconque,

$$\text{(VIII)}\quad 4g(q-q'+h)=\frac{A^2-a^2}{A^2}\frac{c^2}{\mu^2}+4gR,$$

équation dans laquelle

$$R=\int\frac{\varphi d\sigma}{\omega}f\left(\frac{\psi}{\mu}\right).$$

Il suit de là que l'expression générale §IV (équation IV) est encore applicable, si l'on substitue $\frac{v}{\mu}$, $\frac{\psi}{\mu}$ à la place de v, ψ.

Nous nommerons le nombre μ, qui reste encore à déterminer, le *coefficient de la contraction*, et nous supposerons ici, comme dans toutes les recherches suivantes, que la largeur et la position d'une ouverture d'écoulement comme *bb* soit telle qu'on puisse considérer sans erreur sa distance au-dessous du niveau de l'eau affluente, comme sa hauteur de pression h.

§ VII.

S'il y a dans un même vase F'D'B'B'D'F' (*fig*.3) plusieurs diaphragmes percés, et si les sections faites dans le sens de ces diaphragmes; savoir, C'C', D'D', E'E', F'F', ont respectivement pour valeurs A, A', A'', A''' ; que les ouvertures *bb*, *cc*, *dd*, *ee* $= a, a', a'', a'''$, les vitesses correspon-

dantes $= c, c', c'', c'''$; les coefficiens de contraction en $a, a', a'', a''' = \mu, \mu', \mu'', \mu'''$; les hauteurs de pression sur les ouvertures *bb*, *cc*, *dd*, *ee*, F'F' $= q, q', q'', q''', q, h^{iv}$; les hauteurs verticales dans chaque partie du vase, ou $BC'' = -h$, $CD'' = h'$, $DE'' = h''$, $EF = h'''$, et les résistances dans chaque partie du vase R', R'', R''', R^{iv}, on obtiendra, d'après (VIII), en regardant comme un vase isolé la partie F'E'E'F',

$$4g(q^{iv}-q''+h'')=\frac{(A''')^2-(a''')^2}{(A''')^2}\cdot\frac{(c''')^2}{(\mu''')^2}+4gR^{iv},$$

et pour chacune des suivantes

$$4g(q'''-q''+h'')=\frac{(A'')^2-(a'')^2}{(A')^2}\cdot\frac{(c'')^2}{(\mu'')^2}+4gR'''.$$

$$4g(q''-q'+h')=\frac{(A')^2-(a')^2}{(A')^2}\cdot\frac{(c')^2}{(\mu')^2}+4gR''.$$

$$4g(q'-q+h)=\frac{A^2-a^2}{A^2}\cdot\frac{c^2}{\mu^2}+4gR',$$

à cause de $ac=a'''c'''$, et par conséquent $c'''=\frac{ac}{a'''}$, on obtiendra

$$\frac{(A''')^2-(a''')^2}{(A''')^2}\frac{(c''')^2}{(\mu''')^2}$$

$$-\frac{1}{(\mu''')^2}\left(\frac{1}{(a''')^2}-\frac{1}{(A''')^2}\right)a^2c^2.$$

$$\frac{(A'')^2-(a'')^2}{(A'')^3}\frac{(c'')^2}{(\mu'')^2}$$

$$=\frac{1}{(\mu'')^2}\left(\frac{1}{(a'')^2}-\frac{1}{(A'')^2}\right)a^2c^2,$$

d'où l'on tire, en ajoutant les quatre équations précédentes, et en posant

$$E = \frac{1}{\mu^2 a^2} + \frac{1}{\mu'^2 a'^2} + \frac{1}{\mu''^2 a''^2} + \frac{1}{(\mu''' a''')^2}$$

$$F = \frac{1}{\mu^2 A^2} + \frac{1}{(\mu' A')^2} + \frac{1}{(\mu'' A'')^2} + \frac{1}{(\mu''' A''')^2}$$

$$H = h''' + h'' + h' - h, \text{ et}$$

$$R = R' + R'' + R''' + R^{iv};$$

$$4g\,(q^{iv} - q + H) = (E - F)\,a^2c^2 + 4g\,R,$$

ou si les pressions sur les orifices $F'F'$ et bb sont dues à la même hauteur, et si par conséquent $q^{iv} = q$, on aura, en écrivant h à la place de H,

$$\text{(IX)}\quad 4gh = (E - F)\,a^2c^2 + 4g\,R.$$

§ VIII.

Si l'on veut faire usage, dans des cas particuliers, de l'expression générale que nous venons de trouver, il faut connaître les coefficiens de contraction μ, μ', μ'' qui entrent dans les expressions ci-dessus de E et F, de même que les constantes de la fonction R, qui dépendent de l'adhérence des molécules d'eau.

Pour la détermination des coefficiens de contraction, il suffira, dans les cas qui se présentent le plus ordinairement, de distinguer les deux cas du mouvement par l'ouverture d'une paroi mince et par un tuyau prismatique très-court, dont la longueur équivaut à-peu-près au triple de la largeur moyenne de l'ouverture. Ce dernier cas a lieu aussi, si l'eau se meut par une ouverture prismatique dans une paroi épaisse.

Bossut (*Traité théorique et expérimental d'hydrodynamique*, nouv. édit., à Paris, l'an 4 (1796), et Joseph-Therèse Michelotti (*Mémoires de l'Académie royale des sciences*, an. 1784-85, IIe. partie, à Turin), ont fait des expériences suffisamment exactes, de manière que tout se réduit ici à en déduire les coefficiens.

Les expériences de Michelotti se distinguent d'une manière très-avantageuse de celles de Bossut; en ce que les hauteurs de pression dans les réservoirs y croissent au-delà de 20 pieds de Paris, et qu'on y trouve des ouvertures si considérables, que l'écoulement pendant une minute était de près de 200 pieds cubes de Paris. Dans toutes ces expériences, les sections des réservoirs prismatiques étaient si considérables par rapport à l'ouverture d'écoulement, que la vitesse dans le réservoir était insensible, et qu'on pouvait regarder par conséquent comme nulle la résistance provenant de l'adhérence que nous avons désignée par R.

On obtient par conséquent, d'après le § VII, $4gh = (E - F)\,a^2c^2$, ou parce qu'ici $E = \frac{1}{\mu^2 a^2}$ et

$$F = \frac{1}{\mu^2 A^2}.$$

$$4gh = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right) a^2c^2 = \frac{\mu^2}{c^2}\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right).$$

Ceci donne pour $\frac{a^2}{A^2} = 0$; $c = 2\mu\sqrt{g}\,\sqrt{h}$;

et si l'on désigne par M la quantité d'eau qui s'écoule pendant une seconde, on aura $M = ac$, par conséquent $M = 2\mu a\sqrt{h}\,\sqrt{g}$, et par cela le coefficient de contraction

$$\mu = \frac{M}{2a\sqrt{g}\sqrt{h}}$$

Dans les deux premiers tableaux (1), on a réuni les expériences de Bossut et de Michelotti pour des ouvertures dans des parois minces, et l'on a calculé, dans la dernière colonne verticale, par la formule précédente, la valeur du coefficient μ, en posant $g = 181,176$ pouces de Paris, parce que toutes les dimensions se rapportent à cette mesure.

Si l'on prend une valeur moyenne des différentes valeurs trouvées pour μ, on peut supposer, avec une précision suffisante dans les cas ordinaires, que $\mu = 0,619$, et par conséquent $\mu^2 = 0,38316$. Ces expériences prouvent encore qu'on peut considérer sans erreur sensible μ comme une constante, quoiqu'il soit probable et qu'il soit justifié par les expériences faites par le même observateur, que μ dépend tellement de la hauteur de pression, du contour et de la section de l'ouverture d'écoulement, que, dans des circonstances d'ailleurs égales, μ devient d'autant plus grand, que la section de l'ouverture croît et que son contour et la hauteur de pression décroissent.

Mais cette variabilité est si peu considérable, que nous la négligerons dans nos calculs : aussi manque-t-on d'expériences assez précises et assez nombreuses pour déterminer plus exactement cette dépendance.

Bossut et Michelotti ont également fait des expériences très-estimées sur l'écoulement par de petits ajutages, parmi lesquelles on peut

(1) Voyez les tableaux joints à ce mémoire, p. 458.

compter encore quelques-unes de Venturi. (*Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale*. A Paris, 1797.) (1)

Le troisième tableau contient ces expériences réunies. Il faut remarquer que les ajutages dont se servait Michelotti avaient pour sections des carrés de 3 pouces de côté, et que ceux de Bossut et de Venturi étaient cylindriques. La dernière colonne contient les valeurs de μ ; toutes les dimensions se rapportent, comme précédemment, au pouce de Paris.

Ces expériences donnent, comme valeur moyenne de μ, dans de petits ajutages prismatiques, $0,8125 = \frac{13}{16}$: donc $\mu^2 = 0,660156$: on doit faire ici sur les coefficiens de contraction les mêmes remarques que dans le cas des parois minces.

§ IX.

Supposons qu'au bas du réservoir d'une largeur constante ABCD (*fig.* 4), se trouve un tuyau cylindrique DEF, et que le niveau AB reste constant par une affluence continuelle. Soit la section du réservoir $= A$, son contour $= P$, la hauteur $AE = L$; la section du tuyau $= a$, son contour $= p$, la longueur du tuyau $= l$; la hauteur totale de pression $FG = h$, et la vitesse avec laquelle l'eau s'écoule d'une manière invariable en $F = c$, nous aurons, d'après § VII, parce qu'il n'y a pas de contraction en F, et que par conséquent $\mu = 1$,

$$E = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\mu^2 a^2} \text{ et } F = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\mu^2 A^2},$$

(1) Voyez aussi le *Traité des Machines*, de M. *Hachette*, édition 1819, pages 66-86.

donc $E - F = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right)$,

par conséquent,

$$4gh = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{A^2}\right) a^2c^2 + 4g\,R,$$

$$\text{ou } 4\mu^2 gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) c^2 + 4\mu^2 g\,R.$$

Soit la résistance près des parois du tuyau DEF $= R'$, près des parois du réservoir, $= R''$, par conséquent $R = R' + R''$. Soit encore C la vitesse de l'eau dans le réservoir, on aura, § II et III, φ et ω étant ici des constantes.

$$\int \frac{\varphi\, d\sigma}{\omega}(BC + B'C^2) = \frac{PL}{A}(BC + B'C^2) = R'', \text{ et}$$

$$\int \frac{\varphi\, d\sigma}{\omega}(Bc + B'c^2) = \frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) = R',$$

d'où, parce que $C = \frac{ac}{A}$,

$$R = \frac{pl}{a}(Bc + B'c^2) + \frac{PL}{A}\left(B\,\frac{a}{A}\,c + B'\,\frac{a^2}{A^2}\,c^2\right),$$

par conséquent,

$$(X)\ 4\mu^2 gh = \left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right) c^2 + 4\mu^2 g\,\frac{pl}{a}(Bc + B'c^2)$$
$$+ 4\mu^2 g\,\frac{PL}{A}\left(B\,\frac{a}{A}\,c + B'\,\frac{a^2}{A^2}\,c^2\right).$$

On déterminera facilement par cette équation la vitesse c aussitôt que l'on connaîtra les coefficiens B et B'.

Dans un vase très-large, a^2 s'évanouit vis-à-vis

de A^2, et si d'ailleurs le tuyau a une largeur considérable, on peut négliger la résistance qui provient de l'adhérence de l'eau avec les parois du réservoir ABCD : ces suppositions donnent

$$\frac{a^2}{A^2} = 0, \text{ et } R'' = 0\,;$$

par conséquent

$$4\mu^2 gh = c^2 + 4\mu^2 g\,\frac{pl}{a}(Bc + B'c^2), \text{ ou}$$

$$(XI)\ \frac{a}{pl}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = Bc + B'c^2\ (1).$$

Si l'on pose le diamètre du tuyau cylindrique DEF, $= d$, p sera $= \pi d$ (π étant le nombre 3,14159), et

$a = \frac{1}{4}\pi d^2$: donc $\frac{a}{p} = \frac{1}{4}d$, et d'après (XI)

$$\frac{d}{4}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = Bc + B'c^2.$$

Si les coefficiens B et B' doivent être exprimés en mesure d'un pays quelconque, il faut que l'équation précédente contienne les mêmes dimensions dans tous ses termes. Pour cela, on po-

(1) Appelant v la vitesse du liquide à l'orifice, *fig.* 4, du réservoir, dans le cas où l'on supprimerait le tuyau DEF, le coefficient numérique μ est défini par l'équation $c = \mu\, v$. Nous supprimons un article du texte relatif à la théorie des eaux courantes de M. Prony, et nous renvoyons aux tables hydrauliques de ce savant, déjà citées.

sera la quantité qui est encore à déterminer $B' = \frac{\beta}{g}$, g étant le nombre qui se rapporte au mouvement des corps graves, et B, β des nombres abstraits. On aura ainsi

$$(\text{XII})\ \frac{d}{4l}\left(h - \frac{c}{4\mu^2 g}\right) = Bc + \beta\,\frac{c^2}{g},$$

μ^2 étant $= 0{,}660156$; g en pouces de Paris $= 181{,}176$ et en pieds de Prusse $= 15\frac{5}{8}$.

D'après cela, on trouvera la vitesse par l'équation suivante, aussitôt que l'on connaîtra les nombres B, β.

$$c = \frac{-l \pm \sqrt{\left[l^2 + \left(\frac{\beta l}{B^2 g} + \frac{d}{16\mu^2 B^2 g}\right) dh\right]}}{2\left(\frac{\beta l}{Bg} + \frac{d}{16\mu^2 Bg}\right)},$$

où l'on ne prendra que la racine positive.

(Deuxième Mémoire.)

§ X.

Pour déterminer les coefficiens inconnus B,B′ par des expériences suffisamment exactes, il suffira de réunir les expériences des meilleurs auteurs, Couplet, *Recherches sur le mouvement des eaux*. (*Mém. de l'Acad.* de Paris, année 1732); Bossut, *Traité d'hydrodynamique*, tome II. Paris, 1796; et Dubuat, *Principes d'hydraulique*, t. I, Paris, 1786), parce qu'elles renferment tous les cas que la pratique peut présenter. Des tuyaux d'un à 15 pouces de diamètre, de 10 à 7000 pieds de longueur et des vitesses d'un et demi à

84 pouces, ne laissent rien à désirer à cet égard. On n'a point considéré ce qui se passe dans les tuyaux dont le diamètre est inférieur à un pouce, vu l'incertitude avec laquelle on détermine ces diamètres, d'autant plus qu'on ne les rencontre presque jamais dans la pratique, et que le nombre considérable de cinquante et une expériences contenues dans le quatrième tableau, qui se rapporte au § II, est suffisant pour déterminer les coefficiens avec une exactitude convenable. Ce qui n'est pas du tout indifférent, c'est le mode de cette détermination ; car il est évident que les imperfections inévitables des observations sur le mouvement de l'eau ne permettent pas d'attendre une concordance suffisamment exacte des expériences isolées, et que chaque expérience donnera des valeurs différentes pour les coefficiens B, B′.

On peut faire un grand nombre de suppositions pour déduire de la totalité des expériences des valeurs moyennes pour B, B′, et comme il y a deux inconnues à déterminer, il est visible qu'on doit former au moins deux équations par les expériences. Si l'on voulait accorder une préférence à quelques-unes des expériences, on s'en servirait pour la formation des équations, ou si l'on admet que toutes les expériences aient été faites avec le même soin, on peut supposer que la somme algébrique de toutes les déviations doive être zéro, en substituant les dimensions données par les expériences dans l'équation obtenue plus haut, que voici :

$$\frac{d}{4l}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) - B'c - B'c^2 = 0.$$

On pourrait former plusieurs groupes d'expériences, et poser, pour chaque groupe, la somme algébrique des déviations $= 0$; on peut admettre aussi que la déviation la plus considérable, sans avoir égard au signe, devienne aussi petite que possible, ou, encore, que la somme de toutes les déviations prises positivement doive être un minimum. Les suppositions énoncées en premier lieu donnent ordinairement pour des expériences isolées des déviations considérables; ce qui est moins à craindre, en supposant la plus grande erreur aussi petite que possible. Mais, dans ce cas, les coefficiens inconnus se déterminent principalement par les expériences qui dévient le plus : c'est pourquoi il est plus convenable ici de supposer que la somme de toutes les erreurs prises positivement devienne aussi petite que possible. Ayant fixé ceci comme première condition, on peut encore faire une seconde supposition, et ce qui paraît le plus naturel, c'est de poser la somme algébrique de toutes les déviations $= 0$; mais dans le cas qui nous occupe se présente la circonstance particulière que, dans les expériences qui servent pour la determination de B et B$'$, les vitesses croissent de $1\frac{1}{2}$ jusqu'à 84 pouces, et qu'une déviation absolue d'un demi-pouce n'est pas considérable pour 84 pouces, mais qu'elle est le tiers de $1\frac{1}{2}$. Il faut donc plutôt encore que, pour chaque expérience, les déviations de la vitesse calculée ne soient qu'une partie très-petite de la vitesse observée; ce qu'on obtiendra nécessairement, en se servant de préférence, pour la formation des équations principales, des expériences dans lesquelles les vitesses sont petites.

Les deux premières expériences contenues dans le premier tableau, dans lequel les vitesses observées forment une suite croissante, paraissent très-propres à cet objet.

Après avoir fixé les deux suppositions, d'après lesquelles nous devons déterminer B et B$'$, nous renvoyons, pour la démonstration du procédé qui donne la somme la plus petite possible de toutes les déviations, à la *Mécanique céleste* de M. Laplace, tome II, § 40.

Quant à la seconde supposition, nous ferons les remarques suivantes. Que l'on pose dans la dernière équation précédente

$$\frac{d}{4lc}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = f,$$

on aura l'équation générale

$$f - B - B'c = 0.$$

Qu'on calcule pour toutes ces vitesses c', c'', c''', les valeurs correspondantes f', f'', f''', qui se trouvent dans le quatrième tableau, et soit

$$\begin{aligned} f' - B - B'c' &= \delta' \\ f'' - B - Bc'' &= \delta'' \\ f''' - B - Bc''' &= \delta''', \\ \ldots\ldots & \end{aligned}$$

où δ', δ'' désignent les déviations données par le calcul. Soient c', c'' les deux vitesses les plus petites, on aura, d'après la seconde supposition,

$$\delta' + \delta'' = 0 \text{ : donc } \frac{f' + f''}{2} - B - B'\left(\frac{c' + c''}{2}\right) = 0,$$

en posant $\frac{f' + f''}{2} =$ et $\frac{c' + c''}{2} = C$,

$$F - B - B'C = 0.$$

En soustrayant cette équation de chacune des précédentes, on trouve

$$f' - F - B'(c' - C) = \delta'$$
$$f'' - F - B'(c'' - C) = \delta''$$
$$f''' - F - B'(c''' - C) = \delta'''.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Que l'on cherche maintenant les équations $\frac{f' - F}{c' - C}$, $\frac{f'' - F}{c'' - C}$, etc., et qu'on les range dans l'ordre de leur grandeur, en commençant par le positif le plus grand et en finissant par le négatif le plus grand : posons que cette opération donne la série suivante :

$$\frac{M_{,}}{N_{,}}\ ;\quad \frac{M_{,,}}{M_{,,}}\ ;\ \ldots \frac{M_k}{N_k}\ ;\ \ldots \frac{M_n}{N_n}.$$

Que l'on prenne positivement tous les dénominateurs de cette série, et soit

$$N_{,} + N_{,,} + \ldots + N_k \ldots + N_n = S$$
$$N_{,} + N_{,,} + \ldots + N_{k-1} < \tfrac{1}{2} S$$
$$N_{,} + N_{,,} + \ldots + N_{k-1} + N_k > \tfrac{1}{2} S:$$

il faut pour que la somme de toutes ces déviations δ', δ'', prises positivement, devienne un minimum, que

$B' = \frac{Mk}{Nk}$; d'où l'on trouve

$$B = F - \frac{Mk}{Nk}\ C.$$

Par les données du quatrième tableau, on a

$$F = 0{,}0000360155,\ \text{et}\ C = 1{,}79985.$$

Si on détermine par là les quotiens

$\frac{f' - F}{c' - C}$, $\frac{f'' - F}{c'' - C}$, . . . et qu'on les range dans l'ordre de leurs grandeurs, on trouve les numéros suivans, par lesquels on désigne les expériences dans ce quatrième tableau.

Numéros 1. 2. 3. 9. 10. 5. 11. 13. 6. 16. 18. 8. 15. 7. 14. 43. 20. 22. 17. 26. 24. 28. 27. 19. 12. 23. 36. 30. 32. 21. 29. 38. 25. 35. 31. 33. 41. 37. 40. 34. 39. 42. 45. 46. 44. 48. 47 50. 49. 51. 4.

La somme de tous les dénominateurs pris positivement est $= 1161{,}989$: donc $\frac{1}{2}$ S = 580,994, et l'on trouve, en ajoutant les dénominateurs jusqu'à la quarante et unième expérience inclusivement, le nombre $562{,}937 < \frac{1}{2}$ S ; mais en ajoutant encore le dénominateur de la trente-septième expérience, $590{,}352 > \frac{1}{2}$ S, donc le quotient correspondant à la trente-septième expérience, ou

$$B' = 0{,}000007588182,$$

et parce que $B = F - B'C'$, on obtient

$$B = 0{,}000022357912.$$

Comme toutes les dimensions du tableau se rapportent au pouce de Paris, on a ici $g = 181{,}176$, donc $B'g$, ou $\beta = 0{,}001374787$

$$\frac{\beta}{B} = 61{,}490355$$

$$\frac{\beta}{B^2} = 2750272{,}9$$

$$\frac{1}{16\mu^2 B} = 4234{,}4968$$

$$\frac{1}{16\mu^2 B^2} = 189395917.$$

D'après cela, on trouve la vitesse moyenne c de l'eau dans un conduit de tuyau, exprimée en mesure de chaque pays,

$$c = \frac{-l + \sqrt{[l^2 + (2750273\, l + 189395917\, d)\frac{dh}{g}]}}{(122{,}98 \cdot l + 8469 \cdot d)\frac{1}{g}}$$

Posant $g = 181{,}176$, on obtient en pouce de Paris,

$$c = \frac{-l + \sqrt{[l^2 + (15180 \cdot l + 1045370 \cdot d)\, dh]}}{0{,}6788\, l + 46{,}74 \cdot d},$$

ou en posant $g = 15\frac{5}{8}$ pieds, on trouve en pieds de Prusse ou du Rhin

$$c = \frac{-l + \sqrt{[l + (176017 \cdot l + 12121336 \cdot d)\, dh]}}{7{,}87 + 542 \cdot d}.$$

§ XI.

Pour voir d'un coup d'œil avec quelle exactitude on peut déterminer, dans les cas qui se présentent, des vitesses de l'eau dans des conduits de tuyaux par les expressions générales que nous venons de donner, on a mis, dans le tableau quatrième des vitesses données par les expériences, celles que donne le calcul de la formule trouvée pour le pouce de Paris, auxquelles on joint encore les différences entre les vitesses observées et celles que donne le calcul; mais comme ceci ne donne pas une indication aussi complète de l'exactitude des valeurs calculées que la connaissance du quotient de la différence par la vitesse observée, on a encore donné ces quotiens dans la dernière colonne.

La signification des abréviations dont on s'est servi dans ce quatrième tableau est celle-ci :

d, diamètre du tuyau,

l, longueur du tuyau,

h, hauteur de pression ou distance de la surface de l'eau dans le réservoir au centre de l'ouverture d'écoulement.

$$f = \frac{d}{4lc}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right),$$

c, vitesse d'après l'observation,

$[c]$, vitesse calculée par la formule

$$\frac{-l + \sqrt{(l^2 + (15180 \cdot l + 1045370 \cdot d)\, dh)}}{0{,}6788 \cdot l + 46{,}74 \cdot d}$$

$$\delta = c - [c].$$

(*Voyez le quatrième Tableau*, page 461.)

§ XII.

Si on n'exige pas la dernière exactitude, on peut poser sans inconvénient

$$B = 0,\ \text{donc}\ \frac{d}{4l}\left(h - \frac{c^2}{4\mu^2 g}\right) = B' c^2,$$

$$\text{ou}\ \frac{d}{4l}\left(\frac{h}{c^2} - \frac{1}{4\mu^2 g}\right) = B',$$

et il s'agit de calculer pour ce cas la valeur de B'. Si on suppose pour cela que la somme de toutes les déviations prises positivement doive devenir un minimum, on n'a qu'à calculer par le tableau quatrième du § XI toutes les valeurs de

$$\frac{d}{4l}\left(\frac{h}{c^2} - \frac{1}{4\mu^2 g}\right)$$

et à les ranger dans l'ordre de leur grandeur, et la valeur du milieu, c'est-à-dire la 26me., est celle qui correspond au coefficient B'. En exécutant ce calcul, on obtient la série suivante:

Numéros 2. 1. 3. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 4. 11. 13. 16. 15. 18. 14. 20. 12. 17. 22. 19. 26. 24. 23. 27. 28. 43. 21. 30. 29. 32. 36. 25. 31. 38. 55. 33. 41. 37. 34. 40. 31. 42. 45. 46. 44. 48. 47. 50. 49. 51.

La valeur du milieu, qui a pour numéro 28, donne

$B' = 0{,}0000965875$, donc $B'g$, ou β, $= 0{,}001749934$; mais on a

$$c = 2\mu\sqrt{g}\sqrt{\frac{hd}{16\mu^2\beta l + d}}.$$

Par conséquent, pour la mesure d'un pays quelconque,

$$c = 1{,}625\sqrt{g}\sqrt{\frac{hd}{0{,}01848 l + d}}, \text{ ou}$$

$$c = 1{,}625\sqrt{g}\sqrt{\frac{54 \cdot hd}{l + 54d}},$$

ou en pouces de Paris,

$$c = 21{,}87\sqrt{\frac{54 \cdot hd}{l + 54 \cdot d}},$$

ou en pieds de Prusse,

$$c = 6{,}42\sqrt{\frac{54\,hd}{l + 54d}}.$$

§ XIII.

Les expressions générales que nous avons trouvées pour le mouvement de l'eau dans des conduits en tuyaux peuvent être appropriées, par des modifications légères, au mouvement de l'eau dans des canaux découverts par le haut, ou dans des lits de rivière en général, en supposant à ces lits une forme régulière. Supposons que dans le canal d'une largeur constante et ouvert par le haut, B'E' (*fig.* 5), qui a en B' B'' une affluence constante avec une vitesse constante, l'eau en mouvement soit parvenue dans l'état de persévérance tel que B'' M'' E'' représente la surface invariable de l'eau en mouvement, B'M'E' la section du fond du canal, faite dans le sens de la longueur, et BME la ligne centrale de la masse d'eau; les sections B'B'', M'M'', E'E'' sont normales à la ligne centrale dans les points d'intersection B, M, E; on a pris l'horizontale AD pour l'axe des abscises du système de cordonnées rectangulaires. Que l'on pose $AP = x$, $PM = z$, la longueur de la ligne centrale jusqu'à la section indéterminée M'M'', ou $BM = \sigma$; $AB = k$, $DE = k'$; la section $B'B'' = A$, $M'M'' = \omega$, $E'E'' = \omega$, et le contour des sections du lit de rivière (tellement prises qu'on ne tient compte que des parois du canal, nullement de la surface de l'eau, d'après les conditions du § II), en $B'B'' = P$, en $M'M'' = \varphi$, en $E'E'' = p$; enfin la vitesse en $B'B'' = c$, en $M'M'' = \psi$, en $E'E'' = v$.

Supposons que la pression normale sur la section $B'B''$ corresponde au poids d'une colonne d'eau de la hauteur q, et sur $E'E''$ et $M'M''$ au poids d'une colonne des hauteurs respectives q' et q''. Si $AP = x$ croît de l'élément $Pp = dx$, $PM = z$ décroîtra de $oM = -dz$, et $BM = \sigma$ croîtra de $Mm = d\sigma$. Mais la pression normale de la masse d'eau BM contre $M'M'' = \gamma\omega q''$: par conséquent la pression normale qui naît de la tranche élémentaire $M'm'm''M''$ contre $m'm'' = \gamma\omega dq''$. Du poids $\gamma\omega d\sigma$ de l'élément $M'm'm''M''$ naît, dans la direction Mm, une force motrice :

$$\gamma\omega d\sigma \, \frac{Mo}{Mm} = -\gamma\omega d\sigma \, \frac{dz}{d\sigma} = -\gamma\omega dz.$$

La résistance qu'éprouve une tranche d'eau en mouvement sera supposée, comme § II, proportionnelle au contour et à une fonction de la vitesse : alors la résistance éprouvée par la tranche élémentaire $M'm'm''M'' = \gamma\varphi d\sigma f(\psi)$; mais il faut que la pression normale $\gamma\varphi dq''$ soit employée contre $m'm''$, de manière qu'il ne reste que la force motrice,

$$-\gamma\omega dz - \gamma\omega dq'' - \gamma\varphi d\sigma f(\psi),$$

d'où naît la force accélératrice,

$$\frac{-\gamma\omega dz - \gamma\omega dq'' - \gamma\omega d\sigma f(\psi)}{\gamma\omega d\sigma} =$$

$$-\left(\frac{dz + dq''}{d\sigma}\right) - \frac{\varphi}{\omega} f(\psi).$$

Si pendant le mouvement de B en M, s'est écoulé le temps t, on obtient, comme § II,

$$d\psi = \psi dt \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + dt \left(\frac{d\psi}{dt}\right),$$

et par conséquent la force accéleratice de la tranche élémentaire $M'm'm''M''$.

$$\frac{d\psi}{2gdt} = \frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right), \text{ ou}$$

$$\frac{\psi}{2g}\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) + \frac{1}{2g}\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = -\left(\frac{dz + dq''}{d\sigma}\right) - \frac{\varphi}{\omega} f(\psi).$$

Par conséquent

$$4g(dq'' + dz) = -2\psi d\sigma\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right) - 2d\sigma\left(\frac{d\psi}{dt}\right) - 4g\,\frac{\varphi}{\omega}\,d\sigma\, f(\psi),$$

dont on trouve l'intégrale, comme § III, en y mettant ψ^2 à la place de $\frac{v^2 w^2}{\omega^2}$

$$4g(q'' + z) = -\psi^2 - 2w\frac{dv}{dt}\int\frac{d\sigma}{\omega}$$

$$-4g\int\frac{\varphi}{\omega}\,d\sigma\, f(\psi) + \text{const.},$$

et parce que la vitesse dans la section $E'E''$ est invariable ; par conséquent $dv = 0$, on obtient

$$4g\,(q'' + z) = -\psi^2 - 4g\int\frac{\varphi}{\omega} d\sigma\, f(\psi) + \text{const.}$$

Pour $z = k$, on a $q'' = q$, $\psi = c$, et $\int\frac{\varphi}{\omega}\,d\sigma\, f(\psi) = 0$,

par conséquent

$$4g\,(q + k) = -c^2 + \text{const.},$$

et pour $z = k'$, on a $q'' = q'$, $\psi = v$, et que $\int \frac{\varphi}{\omega}\, d\sigma\, f(\psi)$ devienne $= \mathrm{N}$, on a alors

$$4g(q' + k') = -v^2 - 4g\mathrm{N} + \text{const.}$$

Par conséquent, en soustrayant cette équation de la précédente pour chasser la constante,

$$4g(q - q' + k - k') = v^2 - c^2 + 4g\,\mathrm{N}.$$

Si le mouvement devient uniforme, les vitesses dans les sections différentes sont égales, et par conséquent celles ci sont elles-mêmes égales, et l'on a $v = c$ et $q = q'$. Si l'on pose alors la hauteur $\mathrm{AF} = h$, on trouve $k - k' = h$: donc

$$4gh = 4g\mathrm{N}, \text{ ou } \mathrm{N} = h.$$

Soit la longueur totale $\mathrm{BME} = l$, la vitesse invariable de l'eau dans chaque section $= c$, l'aire de chaque section $= a$, son contour $= p$, et comme, § II, $f\psi = \mathrm{B}\psi + \mathrm{B}'\psi^2$, B, B′ désignant des constantes qui restent à déterminer. Mais N est égal à l'intégrale $\int \frac{\varphi}{\omega}\, d\sigma\, f(\psi)$ pour le cas ou φ devient $= p$, $\omega = a$, $\psi = c$ et parce que alors $\int d\sigma = l$, on obtient

$$\mathrm{N} = \frac{p}{a}\, l(\mathrm{B}c + \mathrm{B}'c^2), \text{ ou}$$

$$\frac{ah}{pl} = \mathrm{B}c + \mathrm{B}'c^2;$$

comme $\frac{h}{l}$ est ici une constante, il faut que, pour le mouvement uniforme, même en ayant égard

aux obstacles du mouvement, le fond du lit de la rivière soit rectiligne.

Pour que l'expression que nous venons de trouver contienne des dimensions de même espèce, et qu'elle soit applicable à la mesure d'un pays quelconque sans des modifications ultérieures, l'on posera $\mathrm{B}' = \frac{\beta}{g}$, B étant également une constante encore à déterminer, on aura :

$$\frac{ah}{pl} = \mathrm{B}c + \frac{\beta}{g}c^2.$$

Si donc les coefficiens B, β étaient connus, on trouverait la vitesse dans la mesure d'un pays quelconque, ou

$$c = -\frac{g\mathrm{B}}{2\beta} + \sqrt{\left[\frac{g}{\beta}\,\frac{ah}{pl} + \frac{g^2\mathrm{B}^2}{4\beta^2}\right]},$$

où il faut bien remarquer que cette expression, ramenée à ce degré de simplicité, n'est applicable que pour les eaux courantes dans des lits découverts, et en supposant que ces lits, les chutes et les profondeurs d'eau restent invariables.

§ XIV.

On a des expériences très-estimées sur le mouvement dans les lits de rivière, de MM. Dubuat (*Principes d'hydraulique*, t. I, p. 76 et 77); Brunings (*Architecture hydraulique générale de Wiebeking*, t. I, p. 344 et 388); Wattmann (*Mémoires sur l'art de construire les canaux*, p. 279); Funck (*Sur l'architecture hydraulique générale*, p. 97 et 100).

Elles sont d'autant plus propres à déterminer les coefficiens B et β, qu'elles sont faites dans des circonstances très-variées, de manière à présenter des vitesses de $\frac{2}{5}$ jusqu'à $7\frac{1}{2}$ pieds et des sections transversales qni croissent de $\frac{1}{6}$ jusqu'à 19135 pieds carrés (1). Les expériences de Dubuat ont été faites sur le canal du Jard et sur la rivière la Hayne; celles de Brunings, dans le Rhin, le Waal et l'Issel; celles de Wattmann, dans des canaux de desséchement près Cuxhaven et Ritzebuttel, et celles de Funck; dans le Weser, principauté de Minden. Les expériences de M. Funck (p. 100, livre cité), pour lesquelles l'eau ne se mouvait pas uniformément pendant leur durée, de même que celles qui déviaient trop du résultat moyen, pouvaient être omises sans inconvénient, parce que le nombre des autres est très-considérable. Dans le cinquième tableau (p. 463-465), on trouve trente-six expériences de Dubuat, seize de Brunings, quatre de Wattmann et trente-cinq de Funck; en total, le nombre considérable de 91 expériences, tellement arrangées que les vitesses observées forment une série croissante. Les lettres dont on s'est servi pour abréger ont la signification suivante :

a, la section transversale du lit;

p, son contour ;

l, longueur du lit, à laquelle correspond une pente $= h$;

$\frac{h}{l}$, la pente du lit, parallèle à la surface de l'eau, sous l'unité de longueur; c, la vitesse observée.

Il faut remarquer encore que pour faciliter les vérifications qu'on pourrait vouloir faire, les dimensions n'ont pas été changées dans le cinquième tableau; les expériences de Dubuat se rapportent donc au pouce de Paris, celles de Brunings et de Funck au pied du Rhin, et celles de Wattmann au pied de Hambourg.

(1) La section n°. 62 du cinquième tableau, p. 463, est de 26422 pieds carrés.

Dans le sixième tableau, p. 466, on a ramené toutes les dimensions au pied du Rhin ou de Prusse.

Pour déterminer les coefficiens ; B,B' dans l'équation $\frac{ah}{plc} = B + B'c$, on peut employer le procédé exposé § X, en posant $\frac{ah}{plc} = f$, ce qui donne l'équation générale

$$f - B - B'c = 0.$$

Les valeurs de f, données par chaque expérience, sont contenues dans la dernière colonne du cinquième tableau, sur quoi on peut remarquer qu'elles sont indépendantes de l'unité de mesure, l'expression de f contenant un même nombre de dimensions dans son numérateur et dans son dénominateur. L'on choisira pour la formation de la première équation particulière

$$F - B - B'c' = 0.$$

Par des motifs semblables à ceux du § X, les dix premières expériences du tableau second, et l'on trouvera

$$F = 0{,}000106956 \text{ et } C = 0{,}7207.$$

Faisant le calcul des quotiens $\frac{f'-F}{c'-C}$,

et les rangeant dans l'ordre de grandeur, on obtiendra cette série :

Numéros 14. 28. 6. 49. 10. 51. 23. 57. 36. 44.

71. 76. 58. 53. 24. 26. 45. 3. 63. 1. 68. 47. 29. 27. 82. 9. 48. 84. 74. 85. 83. 64. 12. 90. 88. 72. 8. 67. 62. 61. 59. 43. 56. 54. 86. 81. 80. 65. 79. 89. 50. 91. 87. 70. 30. 75. 4. 73. 78. 32. 40. 2. 66. 35. 77. 38. 37. 19. 52. 69. 39. 41. 42. 51. 55. 33. 18. 13. 34. 60. 21. 46. 25. 16. 17. 7. 20. 22. 11. 15. 5.

La somme de tous les dénominateurs $=$ 237,6246, donc $\frac{1}{2}$ S $=$ 118,8123, et l'on trouve, en ajoutant les dénominateurs jusqu'à la cinquante-sixième expérience inclusivement, le nombre 117,4656 $< \frac{1}{2}$ S, et en ajoutant encore celui de la cinquante-quatrième 120,6002 $> \frac{1}{2}$ S; donc le quotient correspondant à la cinquante-quatrième expérience $=$ B', ou

$$B' = 0{,}0001147368 18.$$

On a de plus $B = F - B'C$; par conséquent

$$B = 0{,}00002426518 1,$$

et toutes les dimensions se rapportant au pied du Rhin, qui contient 139,13 lignes de Paris, on a $g = 15\frac{5}{8}$; donc $B'g$, ou

$$\beta = 0{,}001792763$$

$$\frac{1}{\beta} = 557{,}7984$$

$$\frac{B}{2\beta} = 0{,}006767532$$

$$\frac{B^2}{4\beta^2} = 0{,}0000457995.$$

La vitesse moyenne de l'eau dans la mesure d'un pays quelconque est donc

$$c = -0{,}0067675 \cdot g + \ldots\ldots + \sqrt{\left(557{,}798\, g \frac{ah}{pl} + 0{,}0000458\, g^2\right)}.$$

Pour $g = 181{,}176$, on obtient en pouces de Paris :

$$c = -1{,}2261 + \sqrt{\left(101059{,}7 \frac{ah}{pl} + 1{,}503356\right)}$$

prenant le pied de Paris (325 millimètres) pour l'unité linéaire,

$$c = -0{,}1022 + \sqrt{\left[(8421{,}5784)\frac{ah}{pl} + 0{,}0104\right]},$$

et en posant $g = 15\frac{5}{8}$, on obtient en pieds du Rhin,

$$c = -0{,}1057 + \sqrt{\left(8715{,}6 \frac{ah}{pl} + 0{,}01118\right)}.$$

§ XV.

C'est d'après cette dernière formule qu'on a calculé dans le sixième tableau les valeurs de [c]. On y trouve encore deux colonnes renfermant les quantités $c - [c]$ et $\frac{c - [c]}{c}$. En l'examinant, on sera frappé de la concordance des expériences faites par tant d'observateurs et dans des circonstances si variées, avec les résultats que donne la formule déduite de la théorie.

§ XVI.

Si on ne demande pas la dernière exactitude, on peut, comme § XII, poser $B = 0$; on a alors

$$\frac{ah}{pl} = B'c^2 \text{ ou } \frac{ah}{plc^2} = B'.$$

Si l'on calcule pour chaque expérience la valeur de $\frac{ah}{plc^2}$, et qu'on range ces quantités dans l'ordre de leur grandeur, la valeur du milieu correspondra à la cinquante-quatrième expérience. On obtient par conséquent

$$B' = 0{,}000121103089$$

$$\frac{1}{B'} = 8262{,}3519$$

$$\sqrt{\frac{1}{B'}} = 90{,}8975\,;$$

on a de plus $B' = \frac{\beta}{g}$: par conséquent, toutes les dimensions se rapportent au pied du Rhin, $g = 15\frac{5}{8}$,

$$\frac{1}{\beta} = 5{,}81744 \text{ et } \sqrt{\frac{1}{\beta}} = 2{,}41194;$$

mais on a généralement

$c = \sqrt{\frac{ah}{B'pl}} = \sqrt{\frac{gah}{\beta pl}}$, on trouve par conséquent, dans la mesure d'un pays quelconque, la vitesse

$$c = 2{,}412\sqrt{g}\sqrt{\frac{ah}{pl}},$$

ou pour le pied du Rhin,

$$c = 90{,}8975\sqrt{\frac{ah}{pl}},$$

ou d'une manière suffisamment approchée,

$$c = 90{,}9\sqrt{\frac{ah}{pl}}.$$

Addition aux mémoires précédens de M. Eytelwein;

Par M. HACHETTE.

Le Bulletin de la Société philomatique, année 1823, contient l'analyse que j'avais faite d'un Mémoire de M. Bidone sur le remous et sur la propagation des ondes. Ce Mémoire, lu à l'Académie de Turin, le 12 décembre 1819, a été publié dans le recueil de cette académie, tome 25, année 1820, pages 21 - 112.

M. Bidone a dû considérer, dans ses expériences sur le remous, tous les élémens qui déterminent le mouvement de l'eau dans un canal de figure et de pente données, dont le courant est parvenu à un état permanent. On trouvera à la suite des six tableaux de M. Eytelwein un septième tableau des expériences du savant M. Bidone, qui montrera l'accord presque parfait entre les résultats de ces expériences et ceux calculés par la formule suivante de M. Eytelwein, qui se trouve page 453;

$$c = -0{,}1022 + \sqrt{(8421{,}5784)\frac{ah}{pl} + 0{,}0104};$$

La plus grande différence entre la vitesse calculée et la vitesse observée n'est pas d'un 80e. de cette dernière.

Dans les expériences de M. Bidone, la pente $\frac{h}{l}$ n'a pas varié ; on avait, d'après le profil du fond du canal, auquel la surface du courant était parallèle, $h = 4$ pouces 2 lignes $\frac{5}{12}$; $l = 18$ pieds ; et $\frac{h}{l} = 0{,}019451$. La largeur du canal, où la distance des parois verticales et perpendiculaires au fond du canal, était d'un pied.

La lettre suivante que M. Bidone m'a fait l'honneur de m'écrire, le 13 août 1823, confirme l'accord de la théorie de M. Eytelwein et des meilleures observations sur le cours des grandes rivières.

Extrait d'une lettre de M. Bidone, professeur à l'Université de Turin, adressée à M. Hachette. — Turin, 13 août 1823.

Vous m'écrivez que vous et M. Lacroix avez fait traduire le Mémoire de M. Eytelwein, qui a pour titre (en allemand) *Recherches sur le mouvement de l'eau*, etc., imprimé dans le tome de l'Académie de Berlin, année 1814-15. Vous faites une chose vraiment utile et importante pour les progrès de l'hydraulique théorique et pratique. Vous saurez sans doute que M. Eytelwein, dans le tome de la même Académie, année 1818-19 (imprimé en 1820), a donné la continuation de ses *recherches*, etc.; mais je vais vous dire ce que peut-être vous ne saurez pas à cet égard, par la difficulté des communications : c'est que lorsque j'ai eu connaissance du Mémoire de M. Eytelwein, je l'ai traduit pour mon usage particulier et j'en ai écrit à M. Venturoli, professeur d'hydraulique à Bologne, mais qui maintenant demeure à Rome, en qualité de président de l'Ecole des ponts et chaussées. Celui-ci m'a prié de lui envoyer ma traduction, et c'est ce que j'ai fait très-volontiers. Il a trouvé la formule de M. Eytelwein si bien d'accord avec le très-grand nombre d'expériences que M. Eytelwein même rapporte, que le même M. Venturoli en a fait un extrait en italien, et il l'a publié l'année passée dans un petit ouvrage très-intéressant, qui a pour titre, *Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degli ingegneri pontifici d'acque e strade l'anno* 1821, *Milano* 1822, *per Paolo-Emilio Giuffi.* Dans l'extrait publié par M. Venturoli dans l'ouvrage que je viens de citer, on y a ajouté, entre autres, des expériences très en grand faites en Italie sur le cours de l'eau dans les fleuves, tels que dans le Pô près de Ferrare et dans le Tibre près de Rome. La section du Pô était, au moment des expériences, de plus de 3700 mètres carrés. Ces expériences se trouvent d'accord avec la formule de M. Eytelwein, etc.

. . . .

(*Voyez le septième Tableau*, page 468.)

Ier. TABLEAU (§ VIII, page 432).

Unité linéaire, le pouce de Paris = 27 millimètres.

Expériences sur les écoulemens par des orifices rectangulaires dans de minces parois.

OBSERVATEURS.	Nos.	Orifices d'écoulement. Longueur.	Largeur.	Aires.	Hauteur de pression.	Quantité d'eau écoulée en 1″.	Coefficiens de contraction.
		pouces	pouces	pouces carrés.	pouces.	pouces. cubes.	μ
Bossut..........	1	1,000	0,250	0,2500	140,833	48,833	0,61138
Michelotti.......	2	1,000	1,000	1,0000	140,833	149,320	0,60792
Bossut..........	3	1,000	1,000	1,0000	183,250	196,950	0,61517
Michelotti......	4	1,000	1,000	1,0000	140,643	193,857	0,60722
Id..........	5	1,000	1,000	1,0000	252,250	259,590	0,60715
Id..........	6	2,000	2,000	4,0000	82,754	590,608	0,60293
Id..........	7	2,000	2,000	4,0000	82,905	591,145	0,60293
Bossut..........	8	2,000	2,000	4,0000	140,833	789,350	0,61770
Michelotti.......	9	2,000	2,000	4,0000	140,985	770,044	0,60226
Id..........	10	2,000	2,000	4,0000	141,350	771,059	0,60227
Id..........	11	2,000	2,000	4,0000	250,025	1025,460	0,60226
Id..........	12	2,000	2,000	4,0000	250,950	1027,350	0,60226
Id..........	13	3,017	3,017	9,1007	82,250	1368,930	0,61625
Id..........	14	3,017	3,017	9,007	83,333	1377,680	0,61601
Id..........	15	3,002	3,002	9,0104	140,832	1781,800	0,61899
Id..........	16	3,002	3,002	9,0104	141,466	1785,810	0,61913
Id..........	17	3,004	3,004	9,0220	249,796	2365,030	0,61862
Id..........	18	3,004	3,004	9.0220	251,770	2374,550	0,61616

IIe. TABLEAU (page 432).

Expériences avec des ouvertures circulaires dans des parois minces.

OBSERVATEURS.	Nos.	Diamètr. de l'ouverture.	Aire de l'ouverture.	Hauteur de pression.	Quantité d'eau qui s'écoule dans 1″.	Coefficiens de contraction.
		pouces.	pouces carrés.	pouces.	pouces cubes.	μ
Bossut..........	19	0,500	0,1963	48,000	22,550	0,62451
Id..........	20	0,500	0,1963	108,000	33,633	0,62097
Id..........	21	0,500	0,1963	140,833	38,517	0,62275
Id..........	22	1,000	0,7854	48,000	90,600	0,61850
Michelotti.......	23	1,000	0,7854	81,250	117,546	0,61677
Id..........	24	1,000	0,7854	82,420	118,767	0,61874
Bossut..........	25	1,000	0,7854	108,000	135,583	0,61705
Id..........	26	1,000	0,7854	140,833	154,683	0,61648
Michelotti.......	27	2,002	3,1485	81,151	463,613	0,60719
Id..........	28	2,002	3,1485	82,887	469,250	0,60810
Bossut..........	29	2,000	3,1416	140,833	620,050	0,61779
Michelotti.......	30	3,001	7,0732	82,732	1060,796	0,61249
Id..........	31	3,001	7,0732	140,875	1382,078	0,61153
Id..........	32	3,001	7,0732	249,855	1795,927	0,59669
Id..........	33	6,000	28,2743	77,500	4152,000	0,61963
Id..........	34	6,000	28,2743	78,005	4165,000	0,61956
Id..........	35	6,000	28,2743	135,000	5471,744	0,61842
Id..........	36	6,000	28,2743	135,250	5476,555	0,61868

IIIe. TABLEAU (page 433).

Unité linéaire, le pouce de Paris = 27 millimètres.

OBSERVATEURS.	Nos.	Diamètr. du tuyau.	Long. du tuyau.	Aire de la section du tuyau.	Hauteur de pression.	Quantité d'eau qui s'écoule dans 1″.	Coefficiens de contraction.
		pouces.	pouces.	pouces carrés.	pouces.	pouces cubes.	μ
Bossut..........	1	0,500	2,00	0,1963	24,000	20,367	0,78672
Id..............	2	0,500	2,00	0,1963	46,000	28,150	0,78541
Id..............	3	0,833	2,00	0,5454	24,000	56,700	0,78828
Id..............	4	0,833	2,00	0,5454	46,000	78,383	0,78713
Id..............	5	1,000	1,50	0,7854	140,833	202,800	0,80825
Id..............	6	1,000	2,00	0,7854	140,833	203,133	0,80957
Id..............	7	1,000	4,00	0,7854	140,833	204,567	0,81530
Id..............	8	1,500	4,75	1,7671	27,500	203,303	0,81495
Id..............	9	1,500	4,50	1,7671	32,500	222,967	0,82218
Id..............	10	1,500	5,00	1,7671	32,500	222,967	0,82218
Id..............	11	3,000	8,00	8,9993	80,333	1768,979	0,81467
Id..............	12	3,000	8,00	8,9993	140,250	2301,942	0,80232
Id..............	13	3,000	8,00	8,9993	247,750	3059,503	0,80233

IVe. TABLEAU (page 443).

Contenant les expériences et les calculs sur le mouvement de l'eau dans des conduites de tuyaux.

Unité linéaire, le pouce de Paris = 27 millimètres.

OBSERVATEURS.	Nos.	d	l	h	f	c	$[c]$	δ	$\frac{\delta}{c}$
Dubuat...	1	1	737	0,15	0,0000491	1,589	1,472	+0,117	0,079
Couplet...	2	5	84240	5,883	0,0000827	2,011	2,144	−0,133	0,062
Id.......	3	5	84240	11 $\frac{1}{3}$	0,0001679	3,154	3,454	−0,300	0,087
Dubuat...	4	1	737	0,5	0,0001603	3,623	3,370	+0,253	0,075
Couplet...	5	5	84240	16,75	0,0002480	4,127	4,429	−0,302	0,068
Id.......	6	5	84240	21,083	0,0003121	4,806	5,106	−0,300	0,059
Id.......	7	5	84240	24	0,0003553	5,213	5,525	−0,312	0,056
Id.......	8	5	84240	25	0,0003701	5,323	5,663	−0,340	0,060
Dubuat...	9	1	138,5	0,7	0,0009787	8,689	9,608	−0,919	0,096
Id.......	10	1	737	4,2	0,0013474	10,441	11,825	−1,381	0,117
Id.......	11	1	737	4,2	0,0013439	10,671	11,825	−1,154	0,098
Bossut....	12	1	600	4	0,0015365	12,223	12,777	−0,554	0,044
Id.......	13	1 $\frac{1}{3}$	2160	12	0,0018009	12,562	13,949	−1,387	0,099
Dubuat...	14	1	737	5,93	0,0018859	13,315	14,281	−0,966	0,067
Bossut....	15	1 $\frac{1}{3}$	1800	12	0,0021457	14,066	14,878	−0,812	0,055
Dubuat...	16	1	737	7,78	0,0024772	15,112	16,538	−1,426	0,086
Bossut....	17	1 $\frac{1}{3}$	1440	12	0,0026519	16,128	17,308	−1,180	0,068
Dubuat...	18	1	737	8,96	0,0028513	16,284	17,839	−1,555	0,087
Bossut....	19	7,01	2160	12	0,0026613	16,377	17,261	−0,884	0,051
Dubuat...	20	1	737	8,96	0,0028434	16,625	17,839	−1,214	0,068
Bossut....	21	2,01	1800	12	0,0031545	18,304	18,924	−0,620	0,033
Id.......	22	1 $\frac{1}{3}$	2160	24	0,0035885	18,896	20,266	−1,370	0,067
Id.......	23	1 $\frac{1}{3}$	1080	12	0,0034722	18,943	19,133	−0,190	0,010
Dubuat...	24	1	737	12,32	0,0038958	19,991	20,135	−0,144	0,007
Bossut....	25	2,01	1440	12	0,0038748	20,707	21,134	−0,427	0,020
Dubuat...	26	1	737	13,7	0,0043355	20,970	22,358	−1,388	0,062

Suite du IV^{e}. TABLEAU (page 443).

OBSERVATEURS.	Nos.	*d*	*l*	*h*	*f*	*a*	[*c*]		δ	$\frac{\delta}{c}$
Bossut....	27	1 $\frac{1}{3}$	1800	24	0,0042732	21,032	22,241	—	1,209	0,054
Dubuat...	28	1	737	14,6	0,0046139	21,856	23,129	—	1,273	0,055
Bossut....	29	1	600	12	0,0045675	22,282	23,025	—	0,743	0,032
Id........	30	1 $\frac{1}{3}$	720	12	0,0050275	23,360	24,193	—	0,833	0,034
Id........	31	2,01	1080	12	0,0050322	23,806	24,266	—	0,460	0,019
Id........	32	1 $\frac{1}{3}$	1440	24	0,0052767	24,004	24,877	—	0,873	0,035
Id........	33	2,01	2160	24	0,0052860	24,731	24,946	—	0,215	0,009
Id........	34	2,01	1800	24	0,0062597	27,470	27,112	+	0,358	0,013
Id........	35	1 $\frac{1}{3}$	1080	24	0,0068989	28,075	28,656	—	0,581	0,020
Dubuat...	36	1	737	23,7	0,0074566	28,669	29,809	—	1,140	0,038
Bossut....	37	2,01	720	12	0,0071299	29,215	29,215		0,000	0,000
Dubuat...	38	1	138,5	6	0,0075820	29,341	29,907	—	0,566	0,019
Bossut....	39	2,01	1440	24	0,0076785	30,896	30,416	+	0,480	0,016
Id........	40	1 $\frac{1}{3}$	360	12	0,0089831	33,160	32,969	+	0,191	0,006
Id........	41	1 $\frac{1}{3}$	720	24	0,0099611	34,473	34,732	—	0,259	0,008
Id........	42	2,01	1080	24	0,0099227	35,765	34,835	+	0,930	0,027
Couplet...	43	18,0	43200	145,083	0,0147789	39,159	42,591	—	3,432	0,086
Bossut....	44	2,01	360	12	0,0120064	40,322	37,108	+	3,214	0,087
Id........	45	2,01	720	24	0,0140527	43,000	41,811	+	1,189	0,029
Id........	46	1 $\frac{1}{3}$	360	24	0,0176633	48,534	47,095	+	1,439	0,031
Dubuat...	47	1	117	18	0,0232761	58,310	55,568	+	2,742	0,049
Id........	48	1	138,5	20,95	0,0247675	58,808	56,718	+	2,090	0,037
Bossut....	49	2,01	360	24	0,0233772	58,903	55,418	+	3,485	0,063
Dubuat...	50	1	117	26 $\frac{2}{3}$	0,0342743	71,301	67,833	+	3,468	0,051
Id........	51	1	117	36	0,0446957	84,945	78,963	+	5,982	0,076

V^{e}. TABLEAU en 91 articles (page 450).

Contenant les expériences sur le mouvement de l'eau dans les canaux et lits de rivière.

NOTA. Les résultats des expériences de Dubuat sont exprimés en pouces de Paris, ceux de Brunings en pieds du Rhin, et ceux de Wattmann en pieds de Hambourg (valant 0,91 du pied de Prusse); *l* longueur du lit; *h* pente du lit, sur cette longueur *l*.

OBSERVATEURS.	Nos.	Section transversale du lit. *a*	Contour du lit. *p*	$\frac{l}{h}$	Vitesse observée. *c*	$\frac{ah}{plc}$
Dubuat..............	1	69,00	25,25	9288	4,59	Mêmes valeurs que dans la 2^{e}. colonne du tableau suivant (le 6^{e}).
Id..................	2	155,25	35,25	9288	5,70	
Id..................	3	6125	324	27648	7,27	
Id..................	4	7376	337	27648	7,79	
Id..................	5	20,83	13,62	1728	8,94	
Id..................	6	35,22	21,33	1412	9,20	
Id..................	7	7858	340	21827	9,61	
Id..................	8	34,37	17	1728	9,71	
Wattmann..........	9	34,20	18,1	15000	0,98	
Id..................	10	27,1	16,8	11650	0,98	
Dubuat..............	11	36,77	17,56	1728	11,45	
Wattmann..........	12	7,064	10	4571	1,116	
Dubuat..............	13	51,75	23,25	1412	12,1	
Id..................	14	11905	366	11520	12,17	
Id..................	15	42,01	18,69	1728	12,34	
Id..................	16	34,50	21,25	929	13,56	
Id..................	17	30905	568	32951	13,61	
Id..................	18	76,19	26,08	1412	14,17	
Id..................	19	105,78	29,17	1412	15,55	
Id..................	20	10475	360	15360	15,74	
Wattmann..........	21	11,982	11	4800	1,5	
Dubuat..............	22	39639	604	35723	15,96	
Id..................	23	16252	402	8919	17,42	
Id..................	24	27,2	15,31	427	18,28	
Id..................	25	34,5	21,25	458	20,24	
Id..................	26	39,36	18,13	427	20,30	
Id..................	27	50,44	20,37	427	22,37	
Funk..................	28	0,26	2,8	92,3	2,017	
Dubuat..............	29	56,43	21,5	427	23,54	
Id..................	30	83,43	26	412	27,14	
Id..................	31	18,84	13,06	212	27,51	
Id..................	32	98,74	28,25	432	28,29	
Id..................	33	86,25	27,25	458	28,29	

Suite du V^e^. TABLEAU (page 450).

OBSERVATEURS.	N^os^.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Brunings..........	34	1161,0	290	4931	2,4559	
Dubuat..........	35	100,74	28,53	432	28,52	
Funk..........	36	777	356	2222	2,46	
Dubuat..........	37	50,6	29,5	212	28,92	
Id..........	38	119,58	31,06	432	30,16	
Id..........	39	126,2	31,91	432	31,58	
Id..........	40	38838	601	6413	31,77	
Id..........	41	130,71	32,47	432	31,89	
Id..........	42	135,32	33,03	432	32,52	
Brunings..........	43	2089	296	6701	2,9232	
Id..........	44	12703	1051	9045	2,9264	
Id..........	45	5752	577	7957	2,9894	
Dubuat..........	46	31498	569	6048	35,11	
Brunings..........	47	4419	590	5825	3,1064	
Funk..........	48	2819	401,9	5223	3,223	
Id..........	49	1818	416	1987	3,300	
Brunings..........	50	3088	347	6701	3,3124	
Funk..........	51	3091	366	4009	3,370	
Brunings..........	52	15640	1639	7571	3,4802	
Id..........	53	4542	540	4542	3,5743	
Id..........	54	19135	1176	9045	3,8553	
Id..........	55	7017	595	7957	3,8815	
Id..........	56	2875	316	4931	3,9043	
Funk..........	57	2247	434	1987	3,906	
Id..........	58	3419	373	4009	3,949	
Brunings..........	59	4810	724	5825	4,0597	
Id..........	60	11328	999	7957	4,121	
Id..........	61	12630	765	7957	4,1405	
Id..........	62	26422	1670	7571	4,1551	
Funk..........	63	3700	381,5	4009	4,262	
Id..........	64	7415	575	5223	4,516	
Id..........	65	3946	386	4009	4,622	
Id..........	66	4991	636	3251	4,676	
Brunings..........	67	7190	593	4542	4,696	
Funk..........	68	2697	452	1987	4,750	
Id..........	69	1887	371	2222	4,786	
Id..........	70	4227	388,8	4009	4,800	
Id..........	71	2207,5	336,3	1817	4,809	
Id..........	72	6373	642,9	3251	5,0196	

Suite du V^e^. TABLEAU.

OBSERVATEURS.	N^os^.	a	p	$\frac{l}{h}$	c	$\frac{ah}{plc}$
Funk..........	73	4818	410,7	4009	5,091	
Id..........	74	3006	464	1987	5,100	
Id..........	75	501,5	414,5	4009	5,125	
Id..........	76	2540,5	352,5	1817	5,183	
Id..........	77	5556,5	451,5	4009	5,300	
Id..........	78	6348,4	462,4	4009	5,530	
Id..........	79	3570	484	1987	5,600	
Id..........	80	3931	497	1987	5,800	
Id..........	81	4250	508	1987	5,956	
Id..........	82	3383,5	390	1817	6,114	
Id..........	83	3583,5	396,3	1817	6,352	
Id..........	84	5150	507	1987	6,400	
Id..........	85	3777	400,2	1187	6,485	
Id..........	86	5399	543	1987	6,500	
Id..........	87	5876	566	1987	6,695	
Id..........	88	6259	571	1987	6,752	
Id..........	89	4845	426,3	1817	7,311	
Id..........	90	6016	464	1817	7,677	
Id..........	91	5532	441,4	1817	7,698	

VI^e. TABLEAU (page 451.)

Sur le mouvement de l'eau dans les lits de rivière pour comparer la vitesse observée avec celle que donne le calcul.

Toutes les dimensions se rapportent au pied du Rhin (314,3 millimètres).

OBSERVATEURS.	N^os.	$\frac{ah}{plc}$	c	$[c]$	$c-[c]$	$\frac{c-[c]}{c}$
Dubuat	1	0,00006410	0,396	0,376	+0,020	0,051
Id.	2	08319	0,492	0,501	—0,009	0,018
Id.	3	09405	0,626	0,619	+0,007	0,011
Id.	4	10162	0,672	0,673	—0,001	0,001
Id.	5	09900	0,771	0,716	+0,055	0,071
Id.	6	12711	0,794	0,838	—0,044	0,055
Id.	7	11018	0,829	0,793	+0,036	0,043
Id.	8	12049	0,837	0,836	+0,001	0,001
Wattmann	9	12854	0,895	0,900	—0,005	0,006
Id.	10	14128	0,895	0,949	—0,054	0,060
Dubuat	11	10583	0,987	0,855	+0,132	0,133
Wattmann	12	13848	1,014	1,008	+0,006	0,006
Dubat	13	13017	1,044	0,988	+0,056	0,054
Id.	14	23202	1,050	1,355	—0,305	0,290
Id.	15	10541	1,064	0,889	+0,175	0,164
Id.	16	12888	1,170	1,045	+0,125	0,100
Id.	17	12133	1,174	1,013	+0,161	0,137
Id.	18	14601	1,222	1,147	+0,075	0,061
Id.	19	16517	1,341	1,287	+0,064	0,040
Id.	20	12035	1,358	1,092	+0,266	0,196
Wattmann	21	15129	1,369	1,242	+0,127	0,092
Dubuat	22	11511	1,377	1,074	+0,303	0,222
Id.	23	25946	1,502	1,744	—0,242	0,161
Id.	24	22761	1,577	1,666	—0,089	0,056
Id.	25	17514	1,746	1,530	+0,216	0,124
Id.	26	25046	1,751	1,852	—0,101	0,057
Id.	27	25924	1,929	1,985	—0,056	0,029
Funk	28	49878	2,017	2,857	—0,840	0,416
Dubuat	29	27270	2,030	2,046	—0,016	0,012
Id.	30	28697	2,341	2,316	+0,025	0,017
Id.	31	24735	2,373	2,158	+0,215	0,090
Id.	32	28600	2,440	2,360	+0,080	0,033
Dubuat	33	24428	2,440	2,176	+0,264	0,108

Suite du VI^e. TABLEAU.

OBSERVATEURS.	N^os.	$\frac{ah}{plc}$	c	$[c]$	$c-[c]$	$\frac{c-[c]}{c}$
Brunings	34	0,00033059	2,4559	2,556	—0,100	0,047
Dubuat	35	28660	2,460	2,375	+0,085	0,035
Funk	36	39930	2,460	2,821	—0,361	0,147
Dubuat	37	27976	2,494	2,363	+0,131	0,053
Id.	38	29549	2,601	2,485	+0,116	0,045
Id.	39	28981	2,724	2,520	+0,204	0,075
Id.	40	31718	2,740	2,648	+0,092	0,033
Id.	41	29220	2,750	2,543	+0,207	0,075
Id.	42	29162	2,805	2,567	+0,238	0,085
Brunings	43	36029	2,9232	2,942	—0,019	0,007
Id.	44	45663	2,9264	3,308	—0,382	0,136
Id.	45	41909	2,9894	3,201	—0,212	0,071
Dubuat	46	26070	3,028	2,520	+0,508	0,167
Brunings	47	41392	3,1064	3,243	—0,137	0,044
Funk	48	41667	3,223	3,301	—0,078	0,024
Id.	49	66648	3,300	4,274	—0,974	0,295
Brunings	50	40093	3,3124	3,298	+0,024	0,007
Funk	51	62510	3,370	4,180	—0,810	0,240
Brunings	52	36216	3,4802	3,210	+0,270	0,078
Id.	53	51810	3,5743	3,913	—0,239	0,067
Id.	54	46661	3,8553	3,855	0,000	0,000
Id.	55	38185	3,8815	3,490	+0,391	0,010
Id.	56	47258	3,9043	3,906	—0,002	0,001
Funk	57	66709	3,906	4,661	—0,755	0,193
Id.	58	57899	3,949	4,359	—0,410	0,104
Brunings	59	49121	4,0597	4,065	—0,005	0,001
Id.	60	34581	4,1210	3,335	+0,786	0,191
Id.	61	50111	4,1405	4,148	—0,008	0,002
Id.	62	50294	4,1551	4,163	—0,008	0,002
Id.	63	56762	4,262	4,487	—0,225	0,052
Id.	64	54672	4,516	4,534	—0,018	0,004
Id.	65	55170	4,622	4,609	+0,013	0,003
Id.	66	51622	4,676	4,430	+0,246	0,053
Id.	67	56846	4,696	5,011	—0,315	0,067
Id.	68	63220	4,750	4,718	+0,032	0,007
Id.	69	47828	4,786	4,362	+0,424	0,089
Id.	70	56497	4,800	4,757	+0,043	0,009
Id.	71	75121	4,809	5,506	—0,697	0,145
Id.	72	60746	5,0196	5,050	—0,030	0,006

Suite du VI^e. TABLEAU.

OBSERVATEURS.	N^{os}.	$\frac{ah}{plc}$	c	$[c]$	$c-[c]$	$\frac{c-[c]}{c}$
Brunings........... ..	73	0,00057478	5,091	4,945	+0,146	0,028
Id.................	74	63930	5,100	5,226	—0,126	0,025
Id.................	75	58963	5,125	5,027	+0,098	0,019
Id.................	76	76529	5,183	5,775	—0,592	0,114
Id.................	77	57921	5,300	5,068	+0,232	0,044
Id.................	78	61928	5,530	5,358	+0,172	0,031
Id.................	79	66288	5,600	5,583	+0,017	0,003
Id.................	80	68631	5,800	5,785	+0,015	0,002
Id.................	81	70692	5,956	5,953	+0,003	0,000
Id.................	82	78095	6,114	6,218	—0,104	0,017
Id.................	83	78346	6,352	6,481	—0,129	0,020
Id.................	84	79876	6,400	6,570	—0,170	0,026
Id.................	85	80095	6,485	6,623	—0,138	0,021
Id.................	86	76985	6,500	6,499	+0,001	0,000
Id.................	87	78040	6,695	6,644	+0,051	0,008
Id.................	88	81703	6,752	6,829	—0,077	0,011
Id.................	89	85555	7,311	7,278	+0,033	0,004
Id.................	90	92949	7,677	7,781	—0,104	0,013
Id.................	91	89602	7,698	7,648	+0,050	0,007

VII^e. TABLEAU (page 455).

Expériences de M. Bidone, 13 *décembre* 1819.

N^{os}. des expériences.	Dépenses du canal.	Hauteur de la section du courant.		a	p	$\frac{a}{p}$	Valeur de c donnée par la formule Eytelwein.	Valeur de c qu'on obtient en divisant la dépense par la section.	Différences.
	pieds cubes.	pouces, lignes. p.	l.	pouces carrés.	pieds.	pieds.	pieds.	pieds.	
1	0,6060	1	$8\frac{9}{12}$	0,144097	1,288194	0,111860	4,1798	4,2055	— 0,0257
2	1,0255	2	$6\frac{3}{13}$	0,210069	1,420138	0,147922	4,8211	4,8817	— 0,0606
3	1,3626	3	$1\frac{8}{12}$	0,261574	1,523148	0,171732	1,2024	5,2092	— 0,0068

Sur la liquation; par M. KARSTEN (1);

(*Arch. métallurgiques*, t. 9, p. 3.) — EXTRAIT.

LA liquation a pour but d'extraire l'argent contenu dans le cuivre par le moyen du plomb. La méthode se compose de plusieurs opérations; savoir : 1°. le rafraîchissage; 2°. la liquation proprement dite; 3°. le ressuage; 4°. l'affinage du cuivre ressué; 5°. l'affinage du plomb argentifère, et 6°. le traitement des crasses de toutes sortes qui résultent des opérations précédentes. Généralités.

Les pièces rafraîchies contiennent ordinairement :

Cuivre . . . 0,2143 — 36,6
Plomb. . . . 0,7857 — 100;

mais tout le plomb ne s'en sépare pas par la liquation et le ressuage : 100 parties d'alliage produisent 28,57 parties de cuivre liquaté, qui se composent de :

Cuivre . . . 0,70 — 100
Plomb . . . 0,30 — 43,

et, après le ressuage, ces 28,57 parties se réduisent à 19,05 de cuivre à raffiner, qui contient 2,8575 de plomb, ou 15 de plomb pour 85 de cuivre. Il suit de là que les pièces liquatées retiennent les 0,12 du plomb contenu dans les pièces rafraîchies, et les pièces ressuées les 0,05, et que le plomb entraîne avec lui dans la liquation et le ressuage le quart du cuivre que renferment ces mêmes pièces. Comme l'argent a une affinité in-

(1) Voyez sur la liquation le mémoire de M. l'ingénieur Manès, t. IX, p. 29.