

S U I T E D U M É M O I R E

Sur les Machines à Pilons.

Par le Cit. LEFROY, Ingénieur des mines (1).

II. P A R T I E T H É O R I Q U E.

§. 1^{er}. *De la courbure que l'on doit donner à la surface supérieure de la came.*

Nécessité de rendre constant la force employée à élever chaque pilon.

1. ON avait cru d'abord que, dans ces sortes de machines, l'on ne devait pas s'attacher à rendre le mouvement uniforme pour chaque pilon ; que le but était rempli dès que l'on était parvenu à faire élever le pilon à la hauteur nécessaire, pour acquérir, par sa chute, la pesanteur requise ; et que, d'ailleurs, comme un même arbre soulève à-la-fois plusieurs pilons, il suffisait de disposer leur jeu, de manière que la force motrice, qui fait tourner l'arbre, fût toujours constante. Dans cette persuasion, la surface supérieure de la came était plane ou circulaire. Mais l'expérience fit bientôt voir que l'on s'était trompé ; en effet, la force, employée à élever chaque pilon, n'étant pas constante,

(1) Voyez le commencement de ce Mémoire, dans le N^o. 77, tome 13, page 263.

la pression ne s'exerçait pas également sur chacun des points de la surface supérieure de la came : cette surface se sillonnait au lieu de s'user uniformément, ce qui produisait une augmentation de frottement ; et par conséquent une diminution dans l'effet de la force motrice, un ralentissement de vitesse, et une plus fréquente rupture de pièces.

2. Ces observations, qui n'échappèrent pas à Bellidor, le portèrent à rechercher la courbure de la surface supérieure de la came, propre à rendre la résistance toujours uniforme ; il trouva qu'elle était la développante de l'arc de cercle qui serait décrit, pendant l'élévation du pilon, par un des points de la circonférence, dont le centre serait sur l'axe de l'arbre, et qui aurait pour rayon la plus courte distance de l'axe de l'arbre, à la ligne sur laquelle se ment l'extrémité du mentonnet.

3. Pour ceux qui préfèrent les démonstrations analytiques aux démonstrations synthétiques, nous allons faire voir que l'analyse conduit à la *développante* d'une portion de circonférence de cercle.

Soient $p z x$, T et C , le profil de l'arbre, du pilon et du mentonnet arrivé à la fin de sa courbe, $I \omega$ la ligne verticale, passant par l'extrémité du mentonnet, et Enk la figure que l'on doit donner à la surface supérieure de la came : courbe inconnue, et dont il s'agit de déterminer la nature.

On appelle levée du pilon, le chemin qu'il fait avant de retomber ; et sommet de la came, le point de sa surface supérieure, qui, à l'origine

Nature de la courbure que l'on doit donner à la surface supérieure de la came.

La seule courbe convenable est une développante de circonférence.

Fig. 9.
Pl. XIII.

du mouvement, se trouve en contact avec l'extrémité inférieure du mentonnet.

Démonstration. D'abord le mentonnet étant horizontal, pour que la force, qui le soulève, agisse avec le plus grand effet possible, il faut que la direction en soit verticale. De plus, le bras de levier devant toujours être constant, et ce levier, quand la came est sur le point d'abandonner le mentonnet, se trouvant être os distance du centre de l'arbre à la verticale $I\omega$, qui passe par l'extrémité du mentonnet; il suit que, pour chaque instant du mouvement, l'extrémité seule de la partie inférieure du mentonnet, doit être appuyée sur la came, et qu'elle doit être tangente à sa surface; que le levier du mentonnet, ou la distance de l'arbre à la normale qui passe par le point de contact du mentonnet et de la came, doit toujours être égal à os : donc toutes les normales Es , nM , $h'm'$, $n''m''$, etc. de la courbe Enk , doivent être tangentes à la circonférence sSQ , qui aurait os pour rayon.

Or, d'un point pris dans l'intérieur d'une circonférence, on ne peut mener une tangente à cette circonférence; donc le sommet de la courbe Enk ne peut entrer dans le cercle sSQ ; il ne doit qu'être extérieur à sa circonférence, ou être situé sur un de ses points. Ainsi la courbe cherchée ne peut être que Enh' , ou EnS : supposons qu'elle soit EnS .

Si l'on imagine maintenant que la came redescende, en entraînant avec soi le mentonnet, on voit que, quand le sommet de la courbe coïncidera avec la ligne horizontale passant par le point o , le mentonnet sera revenu à son

point de départ. Donc, pendant l'élévation du pilon, Es est le chemin que fait l'extrémité inférieure du mentonnet, et Ss l'arc décrit par le sommet de la came. Or le mentonnet, et tout point situé sur une circonférence qui aurait pour centre le point o , doivent se mouvoir uniformément; donc les normales Es , nM , $h'm'$, $n''m''$, etc. qui sont les différens espaces que parcourt l'extrémité inférieure du mentonnet, doivent être entre elles dans le même rapport arithmétique que les arcs correspondans Ss , Sm , Sm' , Sm'' , etc. décrits dans le même tems. Mais au point où la normale est zéro (au point S), l'arc correspondant est aussi zéro; donc chaque normale doit être égale à son arc correspondant. De plus, les normales sont tangentes à l'arc Ss .

Donc, 1°. EnS est la développante de l'arc sS , décrit pendant l'élévation du pilon, par le sommet S de cette courbe, ou par tout autre point de la circonférence sSQ . 2°. La levée sE du pilon est égale à la développée sS . 3°. Le mentonnet et le sommet de la courbe, ou un point quelconque situé sur sSQ , décrivent en tems égaux des espaces égaux.

Si EnS est une développante, qui a sS pour développée, la portion de courbe Enh' doit être aussi la développante de l'arc sm' , décrit par un des points de la circonférence sSQ , pendant que le mentonnet, glissant le long de $h'nE$, fait le chemin hE , différence entre les normales Es et $h'm'$.

Donc, 1°. quand le sommet de la surface supérieure se confond avec la circonférence sSQ , l'origine du mouvement du mentonnet est situé

sur la ligne horizontale oB ; 2°. lorsqu'au contraire, le sommet de cette courbe est extérieur à la circonférence sSQ , le point de départ du mentonnet est élevé, au-dessus de oB , d'une quantité hs , égale à la normale $h'm'$; 3°. dans l'un et l'autre cas, la surface supérieure de la came doit toujours être une courbe, qui ait pour développé l'arc décrit, pendant l'élévation du pilon, par un des points de la circonférence dont le centre serait situé sur l'axe de l'arbre, et qui serait tangente à la ligne verticale sur laquelle se meut l'extrémité du mentonnet.

Cas où le choc du pilon est un maximum.

4. Mais, dans le premier cas, la levée du mentonnet est Es ; dans le second cas, elle n'est que Es . Or, un pilon acquiert d'autant plus de force par sa chute, qu'il a fait plus de chemin dans son élévation; donc 1°. pour que le choc d'un pilon soit le plus grand possible, avec un levier donné os , et une distance donnée oE , de l'extrémité de sa came à l'axe de l'arbre, il faut qu'à l'origine du mouvement, la surface inférieure du mentonnet soit au niveau de l'axe de l'arbre, ou, ce qui revient au même, que le sommet de la came coïncide avec le plan horizontal qui passerait par l'axe de l'arbre; 2°. quand on veut diminuer l'effet d'un pilon, le point de départ de son mentonnet doit être au-dessus du plan horizontal, qui traverserait le milieu de l'arbre.

Observation. D'après ce que l'on vient de dire, on doit remarquer que la surface inférieure du mentonnet ne peut jamais être située au-dessous du plan horizontal, qui passerait par l'axe de l'arbre.

5. Comme nous aurons besoin, dans la suite, de la valeur du levier os , nous allons déterminer la relation qui doit exister entre ce rayon, la plus grande levée Es du pilon, et le rapport de l'angle $So s$ à quatre angles droits, ou celui de l'arc Ss , à sa circonférence sSQ .

Soient $sE = h$, $os = r$, et soit représenté par a , le rapport de l'angle $So s$ à quatre angles droits,

On aura $h = Ss = a \times sSQ$. Mais le rapport d'une circonférence à son diamètre, est $\frac{355}{113}$, donc $sSQ = 2r \times \frac{355}{113}$. Donc $h = a \times \frac{2r \times 355}{113}$, et, tirant la valeur de r , (A) $r = \frac{113}{710} \frac{h}{a}$. équation dont nous donnerons ci-dessous la construction géométrique.

Si l'on tire successivement de l'équation (A) les valeurs de a et de h , on obtiendra les deux équations suivantes, (B) $a = \frac{113}{710} \frac{h}{r}$, et (C) $h = \frac{710}{113} ar$. Ces trois équations (A), (B), (C) pourront servir à déterminer une des trois quantités a , h , et r , quand les deux autres seront connues. Ainsi, dans un bocard, la levée du pilon et le levier de la résistance étant donnés, on trouvera, par l'équation (B), quelle doit être la valeur de l'arc qui a servi de développée à la surface supérieure des comes.

Dans le cas où, au lieu de connaître le levier de la résistance, on ne connaîtrait que la distance de l'extrémité de la came à l'axe de l'arbre; comme cette ligne peut être regardée comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui aurait pour côtés de l'angle droit le chemin que fait le pilon pendant son élévation, et le levier de la résistance; en nommant π cette distance, on a $\pi^2 = h^2 + r^2$, d'où l'on tire $r = \sqrt{\pi^2 - h^2}$, et en substituant dans l'équation (B) la valeur de r , elle se changerait en la suivante (D)

$$a = \frac{113}{710} \frac{h}{\sqrt{\pi^2 - h^2}}$$

Expression du levier de la résistance.

Pour faire une application de la formule (*D*), supposons un bocard dans lequel la levée du pilon soit de 10 pouces, et la distance de l'extrémité de la came à l'axe de l'arbre de 15 pouces. Alors $h = 10$ et $\pi = 15$, ce qui donne $a = \frac{113 \times 10}{710 \sqrt{15^2 - 10^2}} = \frac{113}{793,78} = \frac{11300}{79378}$, et, en réduisant la fraction en décimales, $a = 0,1423$ (on néglige les cent millièmes). Ce rapport, exprimé en degrés, donne $360 \times \frac{11300}{79378} = 51^\circ 14'$, abstraction faite des secondes: par conséquent l'arc décrit, pendant la levée d'un pilon, par un point quelconque de la came ou de l'arbre, doit surpasser de $6^\circ 14$ minutes, le huitième de la circonférence que décrirait ce même point pendant une révolution de l'arbre.

A l'inspection de l'équation (*D*), on doit voir que la levée h du pilon, restant la même, plus π , distance de l'extrémité de la came à l'axe de l'arbre, diminue, plus a augmente.

§. II. Procédés pour tracer la courbe des comes.

Procédé
de Bellidor.

Fig. 10.

6. Supposons que xPz représente le profil del'arbre auquel doit être adapté la came, et os la plus contre-distance de l'axe de l'arbre, à la ligne sE , parcourue par l'extrémité du mentonnet. Il faut décrire, du point o comme centre, et d'un rayon égal à os , une circonférence sQS , prendre deux arcs sS et sS' ; égaux chacun à sE , diviser la ligne sS' en portions égales et les plus petites que l'on pourra; tirer par les points de divisions M, M' , etc. les rayons oM, oM' , etc.; élever, à l'extrémité de ces rayons, des perpendiculaires $Mn, M'n'$, etc. chacune égale à son arc correspondant, c'est-à-dire, à la portion de circonférence comprise entre le point de tangence et le point s ; ce qui se fera aisément en divisant la ligne sE
en

en un même nombre de parties égales que l'arc sS' a été divisé, et en prenant $Mn = sN, M'n' = sN'$, etc. (1). De cette manière, la dernière tangente es' sera égale à la droite sE .

Cela posé, si, par les points e, n'', n', n, s , on fait passer une ligne courbe, elle sera la courbe cherchée; puisqu'elle sera la développante de l'arc sS' , et par-là de sS , qui est la portion de circonférence décrite par le point S , sommet de la surface supérieure de la came, pendant que le mentonnet parcourt sE .

7. Le rayon os ne se prend point arbitrairement; il doit dépendre, comme on l'a dit ci-dessus, de la hauteur sE du jeu du pilon, et du rapport de l'arc sS à sa circonférence; rapport que nous ferons connaître plus bas. Ainsi, supposant ce rapport connu, nous allons donner les moyens de trouver os et l'arc sS .

Pour obtenir le rayon, il faut, après avoir déterminé sur su ses deux lignes sK, sT , qui soient entre elles :: $113 : 355$ (rapport du diamètre à la circonférence), prendre une ligne sH , qui soit à sT dans le rapport donné de l'arc sS à la circonférence $sSQI$; porter sE de s en e' , et, après avoir joint les points H et e' par la droite He' , mener, par le point K , une ligne KQ , parallèle à He' : la moitié de Qs sera la ligne cherchée.

On aura l'arc sS , en menant, par le point o , une ligne qui fasse, avec os , un angle

(1) sE étant égale à l'arc sS' , les parties $sN, sN', sN'',$ etc. de la levée donnent les longueurs des portions $sM, sM', sM'',$ etc. de la développée.

Détermination du rayon de la circonférence qui serait décrite par le sommet de la came pendant une révolution de l'arbre.

dont le rapport à quatre angles droits, soit égal à celui qui doit exister entre l'arc sS et sa circonférence.

Démonstration. Il est évident qu'il ne s'agit que de faire voir que, par cette construction, l'on a $sE = sS$.

D'abord le rapport de sH à sT , étant le même que celui de sS à $sSQI$, on a $sH = \frac{sS \times sT}{sSQI}$. Ensuite, à cause des triangles semblables, sHe' , et sKQ , on a $s e' (SE) : sH \left(\frac{sS \times sT}{sSQI} \right) :: sQ : sK$, d'où l'on tire $SE = \frac{sS \times sT}{sSQI} \times \frac{sQ}{sK}$. Mais sK est le diamètre d'une circonférence qui aurait ST pour longueur, et SQ celui de la circonférence $sSQI$: or les diamètres sont entr'eux comme leurs circonférences, donc $\frac{sQ}{sK} = \frac{sSQI}{sT}$.

Donc $SE = \frac{sS \times sT}{sSQI} \times \frac{sSQI}{sT} = sS$. C. Q. F. D.

Un moyen, plus simple et plus commode, de déterminer l'arc $s s'$, serait, après avoir trouvé le rayon os , et avoir décrit la circonférence $sSQI$, de diviser SE en un grand nombre de parties égales, $sN, NN', N'N''$, etc. de prendre, avec l'ouverture d'un compas, l'une de ces parties, et de la porter, à partir du point s , sur la circonférence sIQ , autant de fois qu'il y aurait de divisions dans SE . Par là, on aurait en même tems l'arc $s s'$, et ses divisions $sM, MM', M' M'', M'' s'$.

8. Dans le cas où il serait donné le rayon os , et la longueur relative de l'arc sS , c'est-à-dire, le rapport de cet arc à sa circonférence,

Détermination du chemin que doit faire le pilon.

pour trouver le chemin SE , que doit faire le pilon, ligne qui serait alors inconnue, il faudrait, supposant, comme ci-dessus, sT la longueur d'une circonférence, dont le diamètre serait sK , prendre une ligne sH , qui fût à sT comme $sS : sSQI$, et après avoir joint les points K et Q par la droite KQ , mener, par le point H , une ligne He' , parallèle à KQ , et porter se' de s en E (1).

9. Le procédé que donne Belidor, pour tracer la courbe de la came par les tangentes, quoi que d'une exécution peu difficile, ne laisse pas d'être long et incommode; mais, de ces deux conditions que le pilon doit se mouvoir uniformément, et que la hauteur à laquelle il s'élève, doit être égale à l'arc décrit, pendant la durée de l'élévation, par un des points de la circonférence, dont le centre serait sur l'axe de l'arbre, et qui serait tangent à la ligne parcourue par l'extrémité du mentonnet; le Cit. Hassenfratz a tiré un moyen plus facile et plus commode de déterminer la courbe, moyen qu'il a fait connaître, il y a déjà plusieurs années, et que voici :

Soient xPQ le profil de l'arbre, sE la ligne parcourue par l'extrémité du mentonnet, $sS'S$ l'arc décrit pendant l'élévation du pilon, arc qui doit par conséquent être égal à sE . Si l'on mène oE , et qu'après avoir pris l'arc $s' s q$, égal à $sS'S$, on joigne les points o et s' par la ligne os' , prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence $EE'e$, décrite du point o

Procédé du Cit Hassenfratz, ingénieur en chef des mines.

Fig. 11.

(1) La démonstration est la même que celle donnée dans l'article précédent, pour la solution du problème inverse.

QA , ou QT diminuée d'une de ses parties (1).

Pour avoir maintenant Es , il faut, comme on l'a dit ci-dessus, prendre une ligne dont le rapport à Qu , soit le même que celui de l'arc sS à la circonférence sSQ .

Troisième
procédé.

Fig. 2.

10. A ces deux procédés, nous en avons joint un troisième dans la partie-pratique, article 11, figure 2, pl. IX, qui consiste à tracer directement la courbe demandée, en développant la portion de circonférence, dont elle est la *développante*. Quoiqu'il paraisse moins rigoureux que les précédens, il mérite cependant une attention particulière; car, par sa simplicité, il est plus à la portée des ouvriers.

La marche que nous avons suivie pour arriver à la détermination du rayon de la circonférence $sAQs$, est fondée sur ce théorème qui sera démontré par la suite, que, pour que le mouvement s'approche le plus près possible de l'uniformité, le rapport à sa circonférence de l'arc, dont la surface supérieure de la came est la développante, doit se trouver égal au quotient du nombre des pilons élevés en même tems, par le nombre total des cames que porte l'arbre. Ainsi, en admettant cette condition, et en appelant, 1°. K le nombre de pilons en même tems en l'air; 2°. g la totalité

(1) Le quadruple des neuf dixièmes de la tangente de l'arc de 60° diffère de la longueur de la circonférence de deux centièmes environ. Il est si aisé, pour peu que l'on ait quelques notions de géométrie et d'algèbre, de vérifier cette propriété, que nous n'avons pas cru devoir en donner le calcul.

des pilons; 3°. b le nombre de fois que chaque pylon est élevé pendant une révolution de l'arbre; ce qui donnera bg pour la quantité de cames que l'on doit avoir. Nous allons démontrer que, par les constructions indiquées, le rapport de l'arc skS à la circonférence $sAQs$ est égal à $\frac{K}{bg}$.

D'abord, puisque sG contient autant de fois $\frac{sE}{K}$ que l'arbre porte de cames, $\frac{sE}{K} = \frac{sG}{bg}$, d'où l'on tire $(A) \frac{sE}{sG} = \frac{K}{bg}$. Mais os est les sept 44^{mes}. de sG ; donc sT , double de os , égale $\frac{14}{44} sG$, ou $\frac{7}{22} sG$. Or $\frac{7}{22}$ exprime le rapport d'un diamètre à sa circonférence, donc sG représente la longueur de la circonférence qui aurait sT pour diamètre; donc $sG = sAQs$. De plus la développée sKS est égale au rayon osculateur sE . Si donc on met dans l'équation (A) à la place des lignes sE et sG , leurs valeurs skS et $sAQs$, on aura $\frac{skS}{sAQs} = \frac{K}{bg}$. C. Q. F. D.

Remarque. La levée du pylon sE devant toujours être divisée en autant de parties que l'on veut avoir de pilons élevés en même tems, chaque division de SE a pour valeur $\frac{sE}{K}$.

§. III. *Des moyens de prolonger la durée du mentonnet et de la came.*

11. Quoique la théorie donne une développante de circonférence, cependant, lorsque la came est de bois, les frottemens et la pression changent promptement cette courbe. Si, pour

Inconvé-
niens des
cames de
bois.

chaque point de la surface supérieure de la came, les effets du frottement et de la pression étaient constans, la surface s'userait uniformément, et il en résulterait toujours une courbe de même nature, qui, diminuant seulement de grandeur, ne produirait qu'une perte de chûte; mais comme les fibres de la came ne se présentent pas toujours dans le même sens, et que la force des fibres varie suivant leurs situations, la courbure doit s'écarter de la développante d'une circonférence de cercle, et par conséquent il en doit résulter une inégalité de mouvement.

On peut, à la vérité, diminuer les effets du frottement, en faisant la came avec un bois très-susceptible de poli, tel que le bois de hêtre, et en l'enduisant souvent de vieux oing. Mais il n'en est pas de même de la pression exercée sur chacun des points de cette came, pression qui, ne trouvant pas par-tout une égale résistance, doit faire prendre une autre courbure à sa surface.

Avantages
des comes
de fer.

12. Pour remédier à cet inconvénient, Bélidor propose une came de fer, et le Cit. Baillet une de fonte. La dernière, pouvant se jeter en moule, est d'une exécution moins dispendieuse que la première.

Les comes de fonte et de fer sont encore préférables à celles de bois; 1°. parce que, s'altérant moins, elles doivent être d'une plus longue durée et moins sujettes à la rupture; 2°. parce que les têtes, ou tenons des comes, n'ayant plus besoin d'être aussi grosses et aussi longues, l'arbre, dont les entailles pour les recevoir sont moins grandes et moins profondes,

se trouve par-là moins affaibli, et doit résister plus long-tems.

13. Pour que le mentonnet se conserve plus long-tems, on le fait ordinairement en bois de hêtre; mais quelle que soit la dureté de ce bois, quel que soit le poli qu'il puisse prendre, l'arête inférieure du mentonnet, portant seule tout l'effort, doit promptement s'user.

Des effets
du frotte-
ment du
mentonnet
contre la
came.

De cette diminution d'épaisseur, qu'éprouve journellement le mentonnet, il suit que la came le soulevant plus tard, et le laissant aller plus promptement, le pilon doit faire moins de chemin, et par conséquent avoir une perte de chûte, perte qui ne laisse pas d'être considérable, puisque la quantité, dont la hauteur à laquelle s'élève le pilon, se trouve diminuée, est le double de la diminution d'épaisseur que le mentonnet éprouve.

La perte de chûte n'est pas même le seul désavantage; car alors l'arête inférieure du mentonnet se trouvant remplacée par une surface oblique, il arrive que la résistance ne se trouve plus agir perpendiculairement à la surface supérieure de la came, ce qui doit augmenter son effort, et par conséquent celui de la force motrice.

C'est d'après ces observations que l'on a imaginé de garnir d'une bande de fer l'extrémité inférieure du mentonnet.

Nous avons donné, art. 15 de la Partie-pratique, la description d'une de ces armures.

14. Différentes personnes ont proposé d'adapter un rouleau à l'extrémité du mentonnet. Ce moyen, qui paraît d'abord préférable à celui que l'on a exposé dans la Partie-pratique,

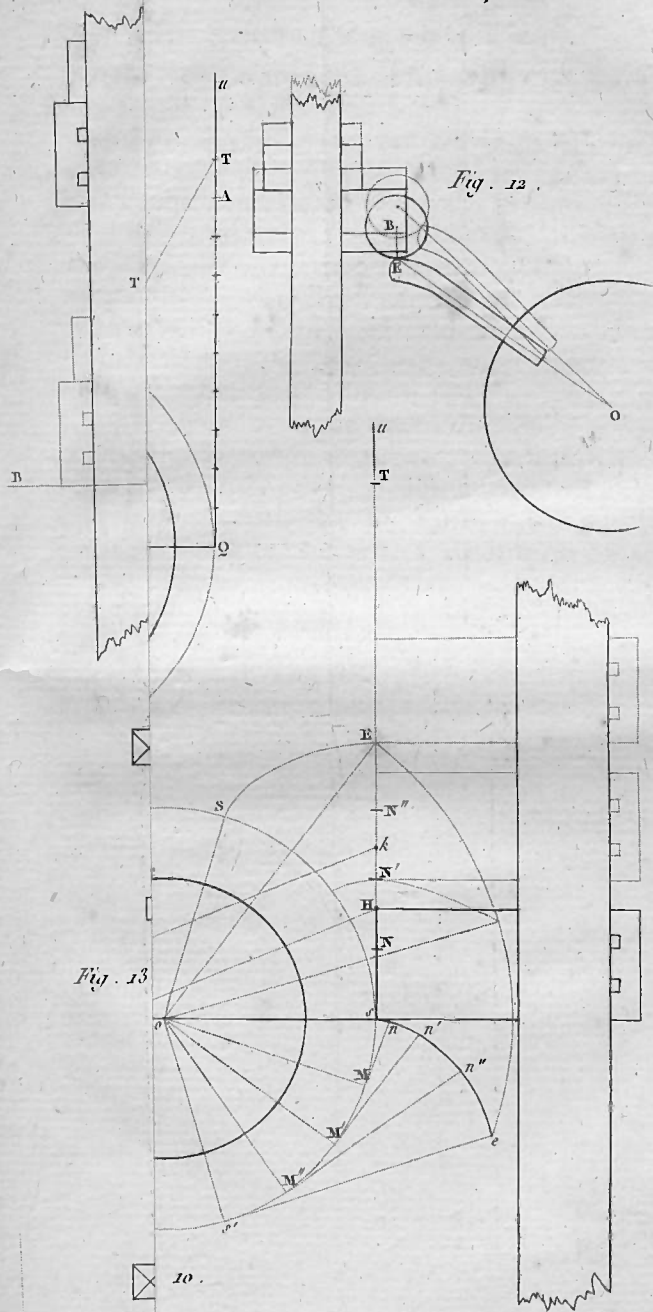
Il ne paraît
pas avanta-
geux d'a-
dapter un
rouleau à
l'extrémité

du mentonnet.

Fig. 12.

me paraît cependant présenter un inconvénient. Quand le rouleau serait arrivé à l'extrémité de la came, il ne serait pas pour cela abandonné par la came, puisque le point de contact *E*, étant situé sur la verticale qui passerait par l'arc du rouleau, la ligne *BEo* serait une ligne brisée : il ne le serait que quand la distance du centre du rouleau à l'axe de l'arbre, serait égal à la somme des rayons du rouleau et de la circonférence décrite par l'extrémité de la came. Or, pendant ce petit moment, la came n'agissant plus perpendiculairement au mentonnet, une portion de la puissance serait employée à presser plus fortement le pilon contre les prisons : ce qui troublerait l'égalité de mouvement, et produirait une secousse dans la machine.

(La suite à un prochain Numéro.)



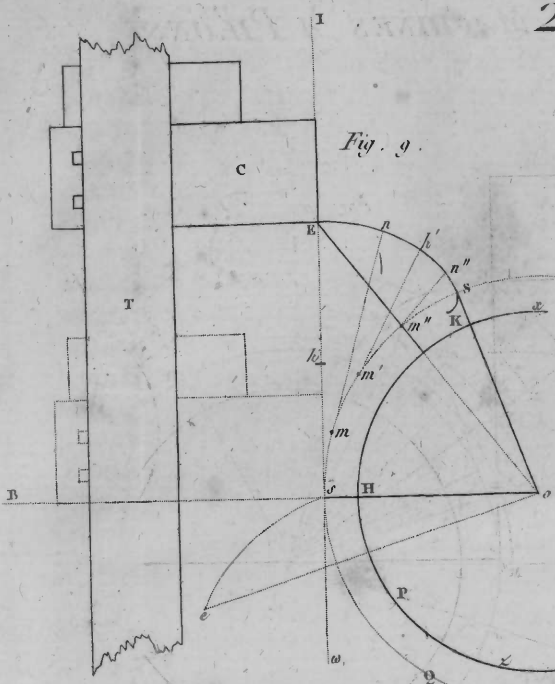


Fig. 9.

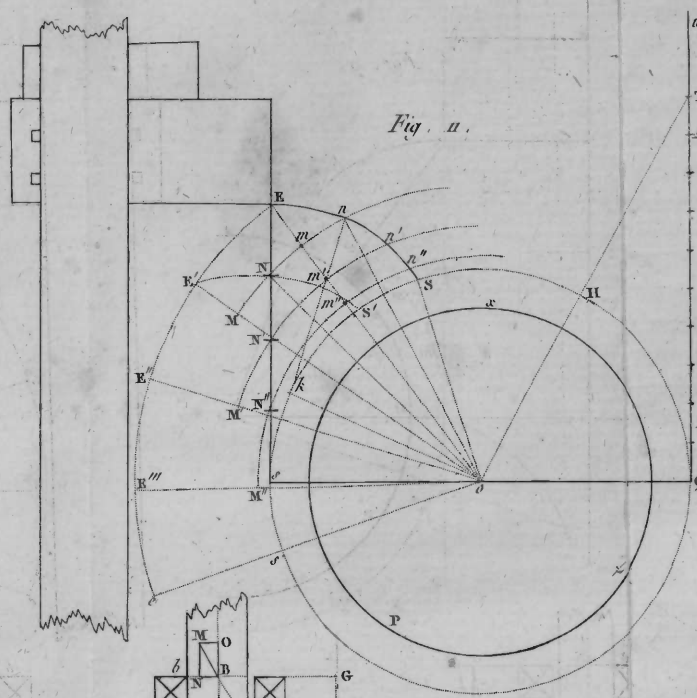


Fig. 11.

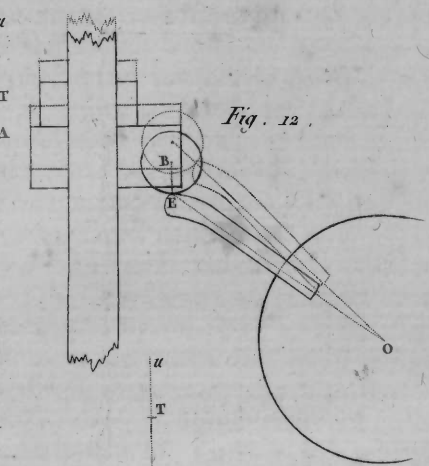


Fig. 12.

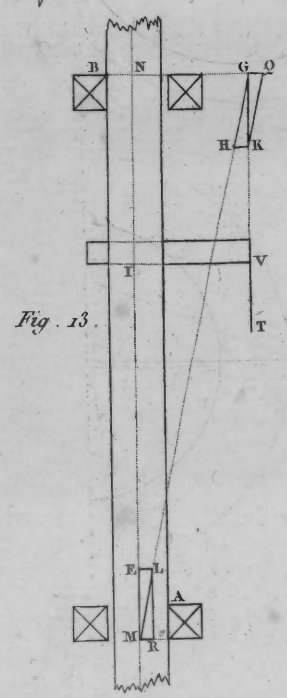


Fig. 13.

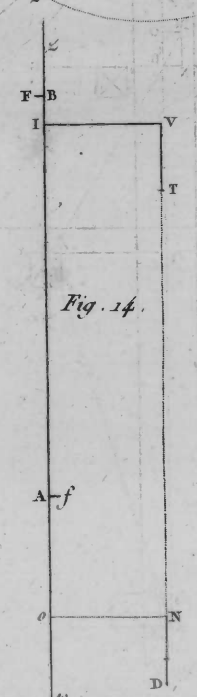


Fig. 14.

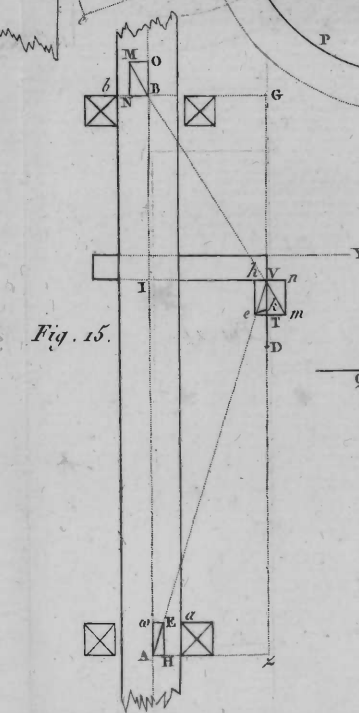


Fig. 15.

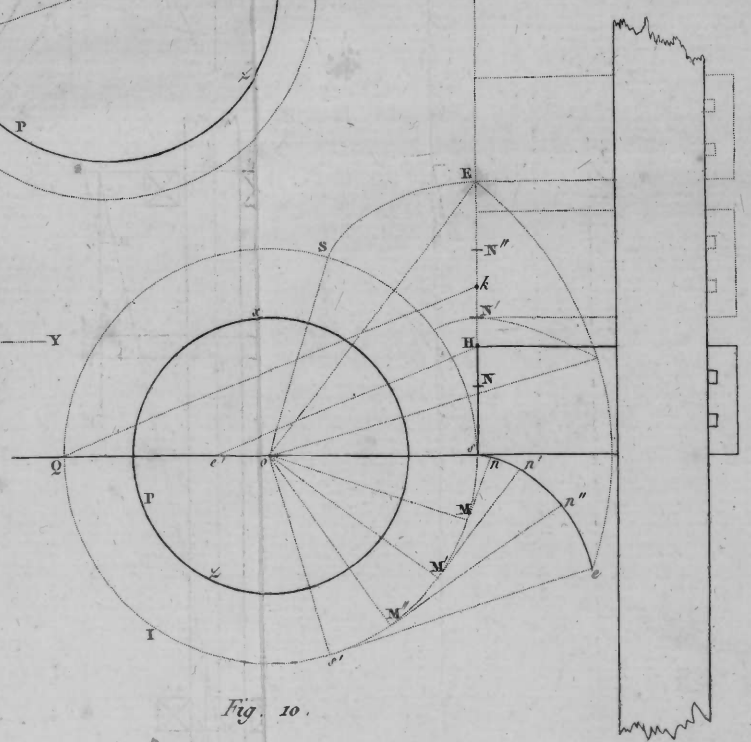


Fig. 10.