

de l'eau parfaitement pure. Il est facile de voir, d'après cette analyse, en faisant les réductions convenables, que le schillerspath contient, pour 100 :

Silice. . . . .	41
Magnésie. . . . .	29
Alumine. . . . .	3
Chaux. . . . .	1
Oxyde de fer. . . . .	14
Eau. . . . .	10
	98
Perte. . . . .	2
Total. . . . .	100

## TABLEAU

*Des Analyses comparées du Schillerspath (1).}*

	ANALYSE par M. Heyer.	ANALYSE par M. Gmelin.	ANALYSE par M. Drappier.
Silice. . . . .	52,00. . . .	43,70. . . .	41
Magnésie. . . .	6,00. . . .	11,20. . . .	29,00
Alumine. . . .	23,33. . . .	17,90. . . .	3,00
Chaux. . . . .	7,00. . . .	00,00. . . .	1,00
Oxyde de fer. .	17,50. . . .	23,70. . . .	14,00
Eau. . . . .	00,00. . . .	00,00. . . .	10,00
Perte. . . . .	00,00. . . .	3,50. . . .	2,00
	105,80. . . .	100,00. . . .	100,00

(1) Ces Analyses sont extraites de la *Minéralogie de M. Brochant*, tome 1, page 422.

## TRAITÉ

## DE MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. LAPLACE, Chancelier du Sénat-Conservateur,  
Grand-Officier de la Légion d'honneur, Membre de  
l'Institut et du Bureau des Longitudes de France,  
etc. etc. (1).

Extrait par M. BIOT.

PARMI les applications des mathématiques, il n'en est point qui soit plus propre que l'Astronomie, à donner une idée de la force et de la puissance du calcul. La connaissance des mouvemens célestes exige, à la vérité, de longues suites d'observations exactes; mais les observations seules ne suffiraient pas, car elles ne peuvent servir à prévoir les phénomènes que quand on connaît les lois auxquelles elles sont assujetties. Pour découvrir ces lois, il faut d'abord établir les principes de la mécanique, et chercher ensuite quelles sont les forces qui doivent animer les corps célestes pour que leurs mouvemens soient conformes aux observations. On arrive ainsi à tirer des phénomènes une loi générale qui est celle de la pesanteur universelle; ce résultat une fois admis, sert, comme principe général, pour prévoir et calculer les mouvemens des astres; on en déduit, par une première approximation, le mouvement elliptique, qui aurait lieu s'il n'existait dans l'espace que deux corps qui s'attirent mutuellement. On a ensuite égard aux *perturbations* provenant de l'action secondaire des corps éloignés. Cette action dépend à la fois de la distance de ces corps, de leur forme et de leur masse; or, en étendant à chaque molécule le principe de

(1) Tome IV. Prix, 15 francs, ainsi que chacun des volumes précédens.

A Paris, chez Courcier, Libraire, quai des Augustins.

la gravitation, on voit que la force attractive d'un corps dépend de sa figure, laquelle, à son tour, est déterminée par des forces extérieures, et les attractions mutuelles des particules dont le corps est composé. Ces considérations appliquées aux corps célestes, donnent la raison de leur forme arrondie, de leur ellipticité, et font voir qu'elles sont la conséquence nécessaire de la combinaison de l'attraction avec la force centrifuge. Elles expliquent les cas singuliers, où cette forme arrondie a pu être remplacée par une surface annulaire, comme cela a lieu dans l'anneau de Saturne considéré comme un amas de satellites adhérens les uns aux autres. Ces mêmes principes appliqués aux couches fluides ou aériformes qui recouvrent des corps solides, font connaître la cause et les lois des oscillations diurnes de la mer et des agitations de l'atmosphère; enfin on en déduit tous les mouvemens des corps célestes autour de leur centre de gravité: car ces mouvemens sont des résultats de leur figure et de l'attraction exercée sur eux par les corps étrangers.

Ce sont là, en quelque sorte, les phénomènes généraux du système du monde: il reste à appliquer particulièrement ces méthodes à chacun des corps de notre système planétaire, car il existe pour chacun d'eux des circonstances influentes auxquelles il faut sur-tout avoir égard, et d'autres dont l'action devient insensible, et qu'il est permis de négliger. Il est extrêmement utile d'introduire ces simplifications dans le calcul qui, sans elles, deviendrait inextricable; mais il faut beaucoup d'art pour les démêler. C'est à force de les rechercher et de les étudier dans leurs petits détails, que l'on parvient à donner à la théorie des planètes et de la lune, la perfection qu'elle a aujourd'hui, perfection telle que l'exactitude des tables astronomiques est souvent égale, et quelquefois supérieure à celle des observations. Ces théories particulières étant calculées, on en peut déduire la mesure exacte de certains phénomènes qui y concourent, et dont l'influence se trouve introduite dans le calcul comme une indéterminée; c'est ainsi que la masse de la lune se déduit des observations des marées, et de plusieurs autres phénomènes, où cet astre exerce son attraction: c'est ainsi que l'applatissage de la terre, cause de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe ter-

restre, peut se conclure de l'observation de ces effets, ou peut se déduire encore de plusieurs inégalités que l'action du sphéroïde terrestre cause dans le mouvement de la lune; rapports que M. Laplace s'est attaché depuis long-tems à rechercher et à développer. Enfin, il reste à faire de même les applications des formules analytiques aux mouvemens des satellites, qui dans leurs révolutions rapides autour de leurs planètes, nous offrent l'image anticipée des phénomènes qui doivent arriver par la suite des siècles dans le mouvement des planètes autour du soleil; et si, à ces résultats, on ajoute les considérations physiques qui peuvent contribuer à l'exactitude des observations, comme la théorie des réfractions astronomiques, et l'examen de quelques causes subtiles qui pourraient agir presque imperceptiblement sur les mouvemens célestes, comme l'impulsion de la lumière, ou la transmission successive de la gravité, on aura le cadre complet de tous les phénomènes astronomiques, et le plan de la *Mécanique céleste*. C'est ce cadre que M. Laplace a rempli; c'est là le plan qu'il s'était tracé, qu'il a développé dans les premiers volumes de son immortel ouvrage, et dont il vient d'achever l'exécution dans le volume que nous annonçons aujourd'hui.

Il y expose d'abord les théories particulières des satellites de Jupiter, dont les mouvemens si curieux par eux-mêmes, acquièrent encore un nouvel intérêt par l'utilité qu'ils présentent dans la détermination des longitudes. M. Laplace développe d'abord les équations de leurs mouvemens, les intègre, et obtient ainsi les expressions de leurs diverses inégalités. Ces inégalités sont peu différentes de celles des planètes et de la lune, mais elles sont liées les unes aux autres par des rapports extrêmement remarquables qui ont la plus grande influence dans toute cette théorie. Ces rapports, que l'on pourrait nommer les *Lois de Laplace*, comme on a nommé les Lois de Képler, ceux qui ont été découverts, dans le mouvement des planètes, par ce grand astronome, tiennent à la proximité des trois premiers satellites de Jupiter; proximité qui donnant plus d'influence à leurs attractions mutuelles, les force d'observer certains rapports dans leurs positions: et ces rapports ne sont pas seulement momentanés ou bornés à une durée de quelques révolutions; M. Laplace prouve par leur durée même, et par l'exactitude

avec laquelle ils s'observent, qu'ils ont toujours existé, et qu'il n'est pas même nécessaire pour cela que dans l'origine des choses, les trois premiers satellites aient été placés précisément comme ces rapports l'exigent, mais il suffit que leurs positions aient été peu différentes de ces rapports, après quoi l'effet de leurs attractions mutuelles, en les ramenant aux positions exigées, a rétabli leurs rapports pour toujours.

Les orbites des satellites éprouvent avec le tems des changemens analogues aux grandes variations des orbites planétaires. Leurs perturbations qui dépendent des masses des satellites, ainsi que de la masse et de l'applatissément de Jupiter, fournissent les données les plus exactes pour déterminer ces élémens. M. Laplace les expose avec beaucoup d'étendue. Il trouve ainsi que le grand diamètre de Jupiter étant pris pour unité, son petit axe est exprimé par le nombre 0,9287. Ce rapport diffère très-peu de celui que donnent les observations directes, et il en résulte une nouvelle preuve de cette vérité, que la pesanteur des satellites vers la planète principale, se compose des attractions de toutes leurs particules.

Ce n'est pas tout que d'embrasser les phénomènes dans des formules analytiques qui en font connaître les lois. Il faut encore introduire les quantités numériques dans les formules, afin de les convertir en tables qu'il suffit ensuite de consulter. C'est ce que l'on appelle des *Tables astronomiques*. Il y a déjà long-tems que M. Delambre s'était chargé de cette tâche pour les satellites de Jupiter, en se servant des formules que M. Laplace avait trouvées. Il a repris de nouveau ce travail avec sa patience, son habileté et son succès ordinaire. Il a discuté pour les nouvelles formules une multitude d'éclipses observées depuis la formation de ces premières tables, ou qu'il n'avait pas pu employer. Ces éclipses déterminent comme autant de points de l'orbite, et on les combine de la manière la plus favorable pour faire ressortir chaque élément. Mais cet examen fait avec toute la rigueur imaginable, n'a donné que très-peu de changemens aux anciens résultats, et l'on peut dire que les nouvelles tables dressées par M. Delambre, atteignent une précision aussi grande que les observations mêmes.

Ces résultats numériques donnent, comme on vient de

le dire, les moyens de mesurer exactement les masses des satellites qui, par la petitesse et l'éloignement de ces corps, auraient échappé pour toujours aux observations directes, et semblaient ainsi devoir nous être toujours inconnues.

Les éclipses du premier satellite ont fait connaître par leurs retours la vitesse de la lumière, qui depuis a été déterminée avec plus d'exactitude par le phénomène de l'aberration. Mais les observations de ce satellite s'étant accumulées avec le tems, M. Delambre les a discutées de nouveau, et il a retrouvé pour l'aberration précisément la même valeur qui avait été assignée par le célèbre astronome Bradley, à qui les sciences sont redevables de cette brillante découverte. Cette identité de résultats prouve que la vitesse de la lumière sur l'orbite de la terre où se produit l'aberration, est la même que dans toute l'étendue de l'espace qu'elle traverse en se transmettant de Jupiter jusqu'à nous.

Ces résultats nouveaux ne sont pas les seuls que M. Laplace déduit de sa théorie perfectionnée, il explique encore les lois de plusieurs phénomènes qui avaient long-tems embarrassé les astronomes, et dont les variations étaient trop compliquées pour qu'il fût possible d'en découvrir la marche par la simple observation.

Mais quelle que soit la perfection à laquelle un homme de génie arrive, il cherche encore les moyens d'atteindre à quelque chose de plus parfait. La théorie des satellites est fondée principalement, comme on vient de le dire, sur les observations de leurs éclipses. M. Laplace donne les formules nécessaires pour les déterminer avec exactitude, et pour en déduire, avec toute la précision possible, les résultats qu'elles peuvent donner. Il invite les astronomes à observer avec soin l'entrée des satellites sur le disque de Jupiter, leur sortie, et celle de leurs ombres. Il montre les avantages que ces observations pourraient avoir pour déterminer la grandeur des disques des satellites, et plusieurs autres élémens de leur théorie.

Les observations des satellites de Saturne étant beaucoup plus difficiles que celles des satellites de Jupiter, leur théorie est bien moins avancée. A peine connaît-on exactement la durée de leurs révolutions et les rayons de leurs orbites. Mais la position de ces orbites présente un phénomène remarquable et observé depuis long-tems. Il consiste en ce

que les orbes des six premiers satellites paraissent être dans le plan prolongé de l'anneau, tandis que le septième s'en écarte très-sensiblement. Cette particularité tient à ce que ce satellite est beaucoup plus éloigné de Saturne que les six autres, qu'ainsi l'ellipticité de Saturne a sur lui beaucoup moins d'influence, tandis qu'au contraire celle du soleil en a davantage. M. Laplace développe ce phénomène avec étendue.

Nous sommes encore moins instruits relativement aux satellites d'Uranus. M. Laplace montre, d'après les observations de Herschell, que l'aplatissement de cette planète combiné avec l'attraction des satellites, peut maintenir toutes leurs orbites à-peu-près dans un même plan, conformément aux observations.

M. Laplace s'occupe ensuite du calcul des perturbations que les comètes éprouvent. La petitesse de ces astres est cause qu'ils subissent des dérangemens considérables. Mais l'étendue et l'allongement de leurs orbites ne permettent pas d'en comprendre le cours dans une seule formule, comme on fait pour les planètes dont l'orbite est peu différente d'un cercle : il faut donc calculer séparément et successivement les perturbations des comètes pour les diverses portions de leurs orbites que l'on a besoin de considérer, et M. Laplace donne les méthodes nécessaires pour cet objet.

Il applique ensuite ces formules à la comète de 1770 qui, après avoir paru d'abord dans une orbite de cinq ans et demi, n'a pas été revue ensuite. M. Laplace fait voir que ce phénomène peut être dû à l'attraction de Jupiter, qui, en changeant une première fois l'orbite de la comète, l'aura rendue visible, d'invisible qu'elle était d'abord, et qui à une seconde révolution l'a, par une attraction contraire, éloignée pour toujours de nos regards. Il résulte de ces calculs, que la comète a traversé le système des satellites de Jupiter sans y causer de dérangement sensible : elle n'a pas non plus influé d'une manière sensible sur la durée de la révolution annuelle de la terre, ou de l'année sydérale ; d'où M. Laplace conclut que sa masse a dû être extrêmement petite, et certainement moindre que la cinq-millième partie de la masse de la terre. Il paraît qu'il en est ainsi de toutes les comètes.

Voilà tout ce qui concerne, à proprement parler, la

théorie et le calcul des mouvemens célestes ; pour compléter la connaissance de ces mouvemens, il ne reste qu'à donner aux observations la dernière exactitude. Une des principales causes qui peuvent les écarter encore de ce terme si désiré, ce sont les réfractions que les rayons lumineux éprouvent en traversant l'atmosphère. A la vérité, on est déjà parvenu à les mesurer avec une certaine précision ; mais il y restait encore quelque incertitude, et l'on n'en doit pas être étonné quand on considère que la chaleur de l'air, sa densité, les vapeurs qui y sont suspendues ; en un mot, que toutes les modifications que l'atmosphère éprouve, concourent à y produire des variations. M. Laplace a repris cette théorie en entier, en s'appuyant sur les résultats les plus récents et les plus précis de la physique, et en les soumettant à une analyse très-fine et très-délicate. On y distingue principalement une méthode fort simple pour obtenir, dans tous les cas, les valeurs approchées des réfractions au moyen des fractions continues. Cette théorie exige la connaissance de la loi, suivant laquelle la chaleur décroît à mesure que l'on s'élève dans l'atmosphère. M. Laplace commence par montrer les inexactitudes de toutes celles qui ont été proposées jusqu'à présent ; il en donne ensuite une autre, dans laquelle il s'assujettit à représenter à la fois les observations des réfractions, celles du baromètre sur les montagnes, et les expériences faites directement sur cette diminution dans les voyages aérostatiques. Revient ensuite au calcul des réfractions, il considère d'abord le cas où le rayon lumineux fait avec l'horizon un angle plus grand que douze degrés, et il prouve qu'alors il suffit d'avoir égard, dans le calcul, à l'état de l'air dans le lieu de l'observation, état indiqué par le baromètre et le thermomètre. Au-dessous de ce terme, il faut avoir égard aux variations de densité et de température des diverses couches d'air dans lesquelles le rayon passe, et la résolution de ce problème, qui comprend ce que l'on nomme les *réfractions terrestres*, donne lieu à M. Laplace de développer plusieurs procédés d'analyse très-ingénieux. Enfin il montre que l'influence de l'humidité de l'air sur les réfractions est tout-à-fait insensible, parce que si la force réfractive de la vapeur acqueuse est plus grande que celle de l'air, cet excès est compensé presque exactement par sa densité qui est moindre.

En général, ce chapitre qui traite des réfrations, est un des plus beaux de l'ouvrage; il intéressera également les physiciens et les géomètres, et il offre un modèle parfait de l'art avec lequel il faut soumettre au calcul les phénomènes naturels.

A la suite de ces recherches, l'auteur en a placé d'autres qui s'y rapportent naturellement: ce sont des formules pour la détermination des hauteurs par les observations du baromètre, et le calcul de l'affaiblissement que la lumière éprouve en traversant l'atmosphère du soleil et celle de la terre.

M. Laplace donne ensuite le calcul d'un phénomène dû au mouvement de la terre, et qui a depuis quelques années occupé plusieurs physiciens. C'est la déviation des corps qui tombent d'une grande hauteur; déviation produite par la plus grande vitesse de rotation que cette hauteur leur donne, et qui se conservant pendant leur chute, les fait avancer un peu le point correspondant de la terre, et tomber à l'orient de la verticale. Cette dissertation avait déjà été insérée par M. Laplace dans le *Bulletin de la Société philomatique*.

L'auteur examine ensuite les variations séculaires que peuvent éprouver les mouvemens des astres par l'impulsion des rayons de la lumière et la transmission successive de la gravité. En comparant les résultats de cette théorie avec les mouvemens observés, la petitesse insensible de ces effets le conduit à prouver que le soleil n'a pas perdu depuis deux mille ans la deux-millionième partie de sa substance. Il en résulte encore que l'action de ces causes sur l'équation séculaire de la lune est tout-à-fait insensible, et ainsi cette équation est due entièrement aux variations de l'excentricité de l'orbite terrestre, comme M. Laplace l'a prouvé depuis longtemps.

Ce volume est terminé par un supplément aux théories de la lune et des planètes, dont les formules se trouvent dans les volumes précédens. Ces formules réduites en tables, ont offert une exactitude pour ainsi dire inespérée. M. Laplace s'est encore efforcé de les revoir avec un plus grand soin, et il y a découvert quelques nouvelles inégalités qui leur donneront, s'il est possible, une correction encore plus grande.

Tel est le tableau abrégé des résultats contenus dans la Mécanique céleste, et particulièrement dans ce dernier

volume. C'est assez, sans doute, pour montrer l'étendue de ce grand Ouvrage, mais non pas pour en faire sentir tout le prix. Les formules qu'il renferme fixeront pour longtemps l'état du ciel. Après avoir servi de règle aux astronomes de notre âge, elles guideront encore les observateurs des siècles futurs, et leurs travaux auront souvent pour objet le développement des pensées qu'ils y auront puisées. Tel a été le sort du livre des *Principes* publié par le grand *Newton*. Il ne reste plus à l'auteur de la Mécanique céleste, qu'à tracer d'une main libre l'histoire de ces découvertes si honorables pour l'esprit humain; et il pourra d'autant mieux le faire, qu'ayant été lui-même un de ceux qui ont le plus découvert, il aura à la fois la profondeur de vue qui fait apprécier les résultats, et l'élévation d'esprit qui fait rendre à chacun ce qui lui appartient.

On a douté souvent si l'esprit humain a toujours marché d'une manière progressive, ou si des révolutions funestes l'ont fait plusieurs fois rétrograder. Mais s'il est permis d'espérer que l'art de l'imprimerie et le progrès universel des lumières le préservent désormais de ces affreux malheurs, combien ne se sent-on pas élevé à l'aspect de ces grands Ouvrages, où se déposent, pour ainsi dire, les méditations séculaires du genre humain, et qui pourraient maintenant concevoir des bornes à la puissance de la pensée, lorsque toutes ses forces se concentrent ainsi de jour en jour, et étendent continuellement leurs progrès? Puisse l'Europe, puisse le monde civilisé, accorder toujours son estime et sa reconnaissance à ces conceptions du génie, sources fécondes des lumières de notre postérité! Et s'il est vrai qu'il existe des écrivains assez peu dignes de ce nom, pour vouloir arrêter un si bel essor, ne craignons pas leurs déclamations insensées: ils ne recueilleront de leurs efforts que la preuve de leur faiblesse, et le mépris de l'avenir, si toutefois ces noms obscurs peuvent jamais y pénétrer.