

semblait intercalé dans le schiste qui constitue le sol de cette contrée, quoique, bien certainement, il ne fût que superposé. A la descente du Petit-Saint-Bernard, on en rencontre des masses très-considérables, qui sont les vestiges de masses encore plus étendues. Sur cette montagne, on est témoin de leur formation; on traverse un torrent connu sous le nom d'*eaux rouges*, qui en dépose continuellement: il est chargé d'un peu d'ocre rouge; delà le nom qu'on a donné aux eaux qui, après l'avoir déposé, y passent dessus et semblent prendre une teinte de sa couleur.

Nous donnerons la troisième partie dans un autre Numéro.

DISSERTATIO

*De Indagando formarum crystallinarum
Caractere geometrico principali.*

O U

MÉMOIRE sur la Détermination du Caractère géométrique principal des formes cristallines;

Par CHR. SAM. WEISS. in-4°. Leipsic 1809.

Traduit par M. BROCHANT DE VILLIERS, Ingénieur en chef au Corps impérial des Mines.

L'AUTEUR de ce Mémoire est avantageusement connu des minéralogistes et des cristallographes français et étrangers. Il est aujourd'hui professeur de minéralogie à Berlin, où il a remplacé M. Karsten. Il avait été précédemment nommé, en 1809, pour remplir la chaire de physique à Leipsic; il fut obligé, suivant l'usage, de soutenir une thèse publique à l'Université lors de sa réception. Le Mémoire dont il est ici question n'est autre chose que cette thèse.

Ce Mémoire, avec le supplément que l'auteur y a ajouté, étant fort long, il nous serait difficile de le publier ici en entier; nous nous bornerons donc à ce qui nous paraît susceptible d'intéresser davantage ceux de nos lecteurs qui s'occupent de cristallographie.

M. Weiss divise son Mémoire en deux parties: la partie *géométrique* et la partie *physique*.

Il n'a vu dans les formes cristallines que *le résultat nécessaire des forces génératrices qui ont déterminé la formation des cristaux*, ou du moins il a présumé d'abord

que cela devait être ainsi ; et il déclare que depuis il s'est entièrement convaincu de cette vérité. Il se propose d'en exposer les preuves avec beaucoup de détails dans un autre Mémoire.

En partant de ce principe, l'auteur a cherché à déterminer chaque forme cristalline ou plutôt chaque forme primitive de la manière la plus simple possible. Cette détermination d'une forme cristalline est ce qu'il appelle son *caractère géométrique principal*, et il obtient ce caractère par la mesure ou le rapport de certaines parties de la forme qu'il appelle ses *éléments*.

Ainsi, par exemple, lorsque M. Haüy a déterminé la forme primitive de la chaux carbonatée par le rapport entre les deux diagonales d'une face quelconque du rhomboïde qu'elle constitue, ce rapport fondamental est, suivant l'expression de M. Weiss, le *caractère géométrique principal* de la chaux carbonatée ; et les deux diagonales sont les *éléments* de la forme cristalline de la même substance.

M. Weiss a suivi cette idée sur toutes les formes cristallines des minéraux, et il a déjà publié le plus grand nombre de ses résultats dans le Mémoire dont il est ici question et son supplément. Il pense que *tous les cristaux ont un axe*, et que l'axe étant dans toute forme géométrique une ligne unique, principale et dominante, le *caractère géométrique d'un cristal doit être fondé sur des éléments ayant un rapport direct avec l'axe*.

Ainsi, pour suivre l'exemple de la chaux carbonatée, ce n'est pas sur les rapports entre les diagonales du rhombe qu'il a établi son *caractère géométrique principal*, mais sur le *rapport entre le sinus et le cosinus de l'inclinaison d'une face à l'axe*.

Il applique le même principe à tous les cristaux, et il détermine leur *caractère géométrique* toujours par le moyen de l'angle, ou des angles que l'axe forme avec les faces adjacentes.

On sent bien qu'il lui a fallu pour cela changer certaines formes qui n'ont point d'axe en d'autres qui ont un axe, telles que les prismes à six faces en rhomboïdes, les prismes à quatre faces en octaèdres, etc. Mais toutes ces *transmutations* sont motivées sur des considérations ingénieuses,

et souvent il en résulte des rapprochemens très-intéressans.

Ces *rapports entre les sinus et cosinus des inclinaisons à l'axe*, sont donc la base de tout le travail de M. Weiss ; mais il n'a choisi ces lignes pour établir son *caractère géométrique principal*, que parce qu'il les regarde comme étant les *directions principales des forces génératrices des cristaux*. C'est ici le point fondamental de sa *théorie physique des cristaux*, théorie dont l'auteur s'est contenté de donner une idée succincte, se réservant, comme nous l'avons déjà dit, de la développer davantage par la suite.

L'auteur ne se dissimule pas que l'établissement de cette théorie nécessite la solution de plusieurs problèmes très-difficiles.

Il faudrait, dit-il, déterminer nos caractères géométriques d'une manière plus rigoureuse, car il en est beaucoup sur lesquels nous ne pouvons encore compter. . . . Il désirerait que l'on pût unir par un même lien toute la série des formes, de manière à pouvoir passer facilement des plus simples aux plus composées, et établir un *système général des formes cristallines* ; . . . il voudrait déterminer les lois qui rapprochent différentes cristallisations ou les limites qui les séparent, . . . les rapports qui peuvent exister entre la cristallisation d'un corps et sa nature chimique, . . . et ceux que peuvent avoir entre elles les formes cristallines des substances qui ont quelque analogie dans leurs parties constituantes, etc. . . .

Nous ne suivrons point M. Weiss dans toutes les considérations qu'il met en avant en posant ces différentes questions et en exposant, quoique par aperçu, sa *théorie physique des cristaux* ; nous revenons à sa partie géométrique ou à son *caractère géométrique principal*, dont nous dirons encore quelques mots avant de commencer la partie de son Mémoire dont nous publions ici la traduction.

D'après ce qu'on a vu ci-dessus, les rapports que donne l'auteur pour établir ses *caractères géométriques principaux*, ne sont fondés que sur des *transmutations* de formes dans d'autres, en partant des rapports qui étaient adoptés pour chacune des premières. En effet, l'auteur a

pris pour base de ses nouveaux rapports ceux que M. Haüy a donné pour ses formes primitives, et il en a déduit les rapports relatifs aux nouvelles formes qu'il leur a substituées. Ainsi ces nouveaux rapports, quelque intéressans qu'ils soient, ne doivent leur exactitude qu'à celle qui a été mise dans la détermination des premiers.

M. Haüy a depuis long-tems fait voir la possibilité de ces *transmutations*, et il en a donné plusieurs exemples. M. Weiss est donc parti des idées et des découvertes de cet illustre minéralogiste dont il a su bien apprécier les talens distingués.

« Le siècle de la cristallographie, dit-il, n'a véritablement commencé qu'à l'époque où M. Haüy a cultivé cette science. Sans doute on ne peut nier que l'idée-mère de toute sa théorie (les rapports entre la forme des cristaux et leur structure interne), n'ait été trouvée avant lui par Bergmann; mais il est constant que M. Haüy n'avait eu aucune connaissance de ce travail de Bergmann lorsqu'il a publié les premiers aperçus de sa théorie; et il a d'autant plus de droit à l'honneur de cette découverte, qu'il se l'est, pour ainsi dire, si bien appropriée, qu'il est le seul qui se soit attaché à cette idée heureuse, qui y ait appliqué le calcul et les considérations géométriques les plus ingénieuses, et qu'enfin il est parvenu à en tirer des résultats nombreux pour toutes les espèces minérales ».

« Aussi, ajoute-t-il, c'est à ce savant célèbre que nous devons presque toutes les descriptions rigoureuses de cristaux que nous possédons jusqu'à présent. Si, depuis, quelques autres minéralogistes ont aussi contribué à étendre nos connaissances cristallographiques, ils n'ont pu le faire qu'en suivant fidèlement la marche que M. Haüy leur avait tracée; et, il n'est encore personne, qui en publiant des descriptions géométriques de cristaux, inspire une confiance aussi entière et aussi générale que cet illustre professeur du Muséum d'histoire naturelle ».

I.

I. *Idées préliminaires.*

On sait que M. Haüy rapporte tous les cristaux d'une seule et même espèce à une forme commune, qu'il appelle *forme primitive*, et qu'il détermine, soit par la structure intérieure de ce minéral lorsqu'on peut l'observer, soit, à son défaut, par l'ensemble des analogies et des rapports géométriques des formes entre elles; qu'ensuite il fait dériver de cette *forme primitive* toutes les autres formes considérées comme *secondaires*, par une addition décroissante de particules suivant certaines lois. Sans décrire ici ces formes secondaires et la manière dont M. Haüy les construit, il est évident que l'on doit trouver dans la forme primitive d'un minéral, les caractères géométriques principaux de toutes ses formes. Mais la forme primitive peut, par des divisions naturelles, se partager en particules plus petites, et enfin très-petites; c'est ce que M. Haüy appelle *molécules intégrantes*. Ces molécules peuvent être semblables à la forme primitive ou en être différentes. Dans ce dernier cas, M. Haüy indique le caractère géométrique principal de toute la forme, tantôt dans ces *molécules intégrantes*, tantôt dans la forme primitive (1); ce qui est absolument indifférent, si nous ne considérons que la définition mathématique de la forme.

Ce que M. Haüy entend par formes primitives.

(1) Car si la forme primitive est un prisme hexaèdre, ou indique le caractère géométrique par la molécule intégrante, on l'indique au contraire par la forme primitive, lorsqu'elle est un octaèdre ou un parallépipède différent de la molécule intégrante. (*Note de l'Auteur.*)

M. Haüy a établi une autre sorte de forme élémentaire qu'il appelle *molécule soustractive*, parce qu'il l'emploie pour ses soustractions ou décroissemens ; mais nous en parlerons peu ici, notre objet n'étant pas de nous occuper des moyens de faire dériver les cristaux secondaires des primitifs.

Examen
des cristaux
par ordre de
formes.

Commençons par réunir tous les caractères principaux des différentes espèces de cristallisation, tels qu'ils sont indiqués dans tout le *Traité de Minéralogie* de M. Haüy, et réunissons ensemble tous ceux qui appartiennent à chacune des classes et genres, ou sections de formes primitives admises par M. Haüy.

On peut
négliger les
formes ré-
gulières de
la géomé-
trie.

Nous pouvons d'abord séparer des autres tous les cristaux présentant une des formes régulières de la géométrie, comme les cubes, les octaèdres, tétraèdres, et dodécaèdres rhomboïdaux réguliers ; car toutes ces formes sont trop bien définies d'avance par cette même régularité géométrique qui les caractérise, pour que nous ayons à nous occuper d'en chercher une détermination plus précise. Il est hors de doute que ces solides géométriques réguliers sont rigoureusement la forme de certains cristaux comme, par exemple, du diamant, du spinelle, du grenat, de la chaux fluatée, de la soude et de l'ammoniaque muriatées, de la magnésie boratée, de l'alumine sulfatée, du plomb et de l'argent sulfurés, de tous les métaux natifs etc., et nous pouvons dire qu'il n'est aucuns cristaux dont nous connaissions aussi bien les propriétés mathématiques. Cependant il y a plusieurs manières d'exprimer les caractères fondamentaux de ces formes ré-

gulières. Il serait difficile de déterminer celle que l'on doit préférer ; et on ne serait pas beaucoup guidé dans ce choix en les étudiant tous séparément. Il serait plus sûr de procéder en cela, par analogie, en observant auparavant des cristaux de formes semblables, mais moins régulières ; car ces cristaux font reconnaître plus facilement en quoi consistent les lois fondamentales : mais aussi, après avoir considéré les différens cristaux que l'on appelle irréguliers, et avoir découvert leurs lois, nous reviendrons quelquefois, et avec un nouveau fruit, aux corps réguliers pour leur comparer les premiers ; car ces formes régulières se rencontrent si souvent dans la nature et dans des corps si différens, qu'elles paraissent avoir été comme le but général et le type de toutes les cristallisations.

Les formes géométriquement irrégulières que M. Haüy a admises comme formes primitives, sont des parallépipèdes, des octaèdres, des prismes hexaèdres réguliers, et enfin, des dodécaèdres à plans triangulaires. Nous pouvons omettre ce dernier genre de formes, puisque dans les deux seuls exemples qu'elles présentent, le quartz et le plomb phosphaté, M. Haüy lui-même, dans l'indication de leurs caractères géométriques, a jugé devoir les rapporter à des rhomboèdres, genre de parallépipèdes très-digne de remarque. Cependant, quant au quartz, M. Haüy paraît être resté dans le doute, car dans l'article où il traite de cette pierre, il indique sa forme primitive comme étant un rhomboèdre, et au contraire, dans le catalogue général des formes primitives, il range cette

Enumé-
ration des for-
mes primi-
tives.

même pierre parmi celles qui ont pour forme primitive un dodécaèdre à plans triangulaires.

On voit par ce seul exemple, qu'une forme primitive peut être transformée en une autre. Nous aurons occasion par la suite de citer de nombreux exemples de cette liaison qui paraît rapprocher l'une de l'autre certains genres de formes primitives. Aussi, il nous faut bien prendre garde de trop nous hâter de regarder ces différens genres comme formés par la nature.

II. *Des prismes hexaèdres réguliers.*

Parlons d'abord du prisme hexaèdre régulier, considéré comme étant un genre de forme primitive.

Je suis entièrement convaincu que c'est un genre bâtard qui doit être rapporté à un autre genre de forme primitive; savoir, les rhomboèdres simples ou doubles. Mon opinion, à cet égard, est fondée sur la nature physique de la forme primitive; j'en exposerai ailleurs les motifs. Mais en attendant, je dois considérer ici le prisme hexaèdre régulier comme étant une des formes primitives admises par M. Haüy; je me bornerai à considérer ces formes géométriquement, et à faire reconnaître que le prisme hexaèdre régulier peut toujours être rapporté au rhomboèdre, ou changé en rhomboèdre et réciproquement.

Les variations spécifiques entre les différens prismes hexaèdres, consistent dans le changement de rapports entre la hauteur et la largeur. C'est pourquoi M. Haüy a placé le caractère géométrique principal de ces formes,

C'est un genre à supprimer. On peut le changer en rhomboèdre.

Caractères des prismes hexaèdres d'après M. Haüy.

dans le rapport entre la hauteur du prisme et la perpendiculaire menée du centre de la base sur son côté.

Soit cette perpendiculaire = p et la hauteur = a . Les caractères des différentes formes de ce genre seront, d'après M. Haüy, ainsi qu'il suit :

| | | | | | | | |
|----------------------------|-----|---|-----|----|------------|---|-------------|
| Chaux phosphatée. | p | : | a | :: | $\sqrt{3}$ | : | $\sqrt{2}$ |
| Télésie ou saphir. | p | : | a | :: | 2 | : | $\sqrt{30}$ |
| Emeraude. | p | : | a | :: | $\sqrt{3}$ | : | 2 |
| Népheline. | p | : | a | :: | $\sqrt{7}$ | : | $\sqrt{2}$ |
| Mercure sulfuré. | p | : | a | :: | 1 | : | $\sqrt{2}$ |

On voit par ce tableau que M. Haüy a toujours suivi la même méthode pour définir les caractères principaux des cristallisations de ce genre, les ayant toujours exprimés, ou par des nombres entiers, ou par des racines carrées de nombres entiers, ou, si l'on veut, par des racines carrées en général, puisqu'un nombre entier peut toujours être considéré comme la racine carrée d'un autre.

Nous observerons, quant à la forme de la télésie, dont le caractère géométrique, plus compliqué et moins simple que les autres, peut paraître moins satisfaisant, que le célèbre Haüy, qui chaque jour met tous ses soins à perfectionner son système, a dernièrement rejeté cette forme en associant la télésie avec une autre espèce de pierre, qui est le corindon, dont la forme primitive est un rhomboèdre. Nous l'examinerons lorsque nous nous occuperons de ce genre de forme, et ce sera un des exemples de

La télésie est renvoyée au corindon.

la transmutation du prisme hexaèdre régulier en un rhomboèdre.

Le rapport pour la népheline est le même que pour la tourmaline.

La forme de la népheline a cela de remarquable, qu'en admettant, d'après M. Haüy, son caractère principal comme on vient de l'indiquer, son expression se rapporte très-bien, et est même tout à fait conforme, avec l'expression que donne également M. Haüy du rhomboèdre de la tourmaline; car dans ce rhomboèdre, la diagonale horizontale est à la diagonale oblique comme $\sqrt{7} : \sqrt{3}$.

En effet, on peut conclure de ce rapport, que la face primitive de la tourmaline est également inclinée à l'axe que le plan secondaire, qui naît dans la népheline par un décroissement \bar{B} , suivant l'expression de M. Haüy, et le rapport du sinus au cosinus dans cette incidence, doit être comme $\sqrt{7} : \sqrt{2}$. Ce rapprochement sera démontré géométriquement lorsque nous parlerons des rhomboèdres.

Cependant cette conformité entre la népheline et la tourmaline, conformité qui est, il est vrai, masquée par la différence de forme primitive, mais qui n'en est pas moins réelle, ne peut s'accorder avec les différences minéralogiques qui distinguent ces deux espèces. Aussi sommes-nous disposés à adopter les changements que M. Haüy se propose aujourd'hui de faire à l'expression de la tourmaline, depuis que d'après l'indication de M. de Bournon, et d'après des mesures prises sur de plus gros cristaux que ceux qu'il avait eus jusqu'ici, il a jugé que cette expression devait être modifiée.

Je n'ai pas connaissance que M. Haüy ait

encore publié cette nouvelle expression de la tourmaline, conformément à ses dernières observations. Mais je tiens de cet illustre savant, dans les conférences que j'ai eu l'avantage d'avoir avec lui, et qui m'ont été infiniment précieuses, que ce changement devait être fait très-promptement. (*Voy.* le Tab. comparatif, etc.)

Il reste à parler des caractères très-simples de la chaux phosphatée et de l'émeraude; car pour le cinabre, nous ne pouvons nous regarder encore comme certains de connaître sa forme, les cristaux étant jusqu'ici trop petits pour se prêter à des mesures rigoureuses. Il y a même plus, c'est que cette substance, dont la forme devrait, d'après le caractère que M. Haüy en a tracé, s'associer au cube et aux autres corps réguliers de la géométrie, s'écarte beaucoup dans sa cristallisation de la régularité qu'elle devrait avoir, et que, d'après tous les autres indices, on a de fortes raisons de douter que son caractère soit exactement déterminé.

Le caractère géométrique que M. Haüy donne à l'émeraude est très-simple; mais on peut cependant le rendre encore plus simple, en changeant sa forme primitive en une autre qui nous paraît être la véritable; c'est la forme qui résulte du décroissement \bar{B} de M. Haüy, dont les faces sont marquées *t* dans la *planchette XLV, fig. 47 de son Traité*. Cette forme serait un dodécaèdre à triangles isoscèles, semblable à ceux du quartz, du plomb phosphaté et autres. Le rapport du sinus au cosinus de l'incidence de chaque plan sur l'axe, serait $\sin : \cos :: 2\sqrt{3} : 2 :: \sqrt{3} : 1$. Ainsi on peut

Le caractère du cinabre est douteux.

Observations sur celui de l'émeraude.

remplacer l'expression déjà très-simple de M. Haüy, $\sqrt{3} : 2$, par cette autre encore plus simple $\sqrt{3} : 1$.

Sur celui de la chaux phosphatée.

Nous ne trouvons rien à changer au rapport qui exprime le caractère géométrique de la chaux phosphatée, puisqu'il peut servir également pour déterminer notre expression de cette cristallisation. En effet, si nous supposons encore ici qu'au lieu du prisme hexaèdre la forme primitive est un dodécaèdre à triangles isocèles, et que les faces de ce dodécaèdre soient les faces x (*planc. XXX, fig. 72 et 73 de M. Haüy*), les mêmes qui sont produites par la

loi \hat{B} , le rapport entre le sinus et cosinus de l'incidence de chacun de ces plans à l'axe, sera $\sin : \cos :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Car c'est une conséquence

de l'expression \hat{B} de M. Haüy, que le sinus de l'angle dont il s'agit n'est autre chose que la ligne p ci-dessus, et le cosinus la ligne a .

Le rapport $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ se retrouve dans plusieurs espèces.

Mais ce rapport $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ est un sujet de méditation pour tous ceux qui ont quelques connaissances des calculs cristallographiques. Ce rapport est en effet celui des diagonales du rhombe de la forme primitive de la chaux carbonatée, et il se retrouve encore dans les formes de plusieurs autres espèces. Mais sa comparaison entre la chaux phosphatée et la chaux carbonatée, est tellement naturelle et nécessaire, qu'elle fait naître invinciblement l'idée qu'il existe certaines liaisons, jusqu'ici inconnues et indéterminées, entre les formes des différentes espèces, et par conséquent, entre leurs différens systèmes de cristallisation. Ce soupçon se fortifie encore lorsqu'on se rap-

pelle que la baryte sulfatée a aussi pour expression de sa forme, le même rapport $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Et en effet, il est impossible de ne pas convenir que ces trois espèces, la chaux carbonatée, la chaux phosphatée, et la baryte sulfatée, quoique parfaitement distinguées les unes des autres, n'aient cependant entre elles une sorte de rapport de ressemblance chimique, et pour ainsi dire, un certain air de famille.

III. Des rhomboèdres.

Les formes primitives en parallépipèdes sont si variées, qu'il est nécessaire de partager ce genre en plusieurs sections, et de considérer chacune d'elles comme formant un genre particulier de formes primitives cristallines. Le parallépipède qui doit tenir le premier rang est le *rhomboèdre*. Nous préférons ce nom à celui de *rhomboïde* adopté par M. Haüy pour désigner le même solide, trouvant ce nom de rhomboèdre infiniment plus convenable et plus adapté au langage ordinaire. En effet, nous appelons *rhomboïde* un parallélogramme oblique à côtés inégaux. M. Haüy, au contraire, a désigné par ce même nom un solide circonscrit par six rhombes égaux et semblables. En nommant ce solide *rhomboèdre* pour satisfaire à la nécessité de changer le mot de *rhomboïde*, nous avons suivi l'analogie d'autres mots déjà adoptés pour désigner des solides, tels que ceux d'octaèdre, tétraèdre, dodécaèdre, icosaèdre, etc.

Motifs de cette dénomination.

Le rhomboèdre est une des formes les plus importantes en cristallographie; aussi M. Haüy

en a-t-il fait une étude particulière? et la science dont il a si bien mérité sous tant de rapports, lui est plus particulièrement redevable pour ses travaux sur cet objet. Son Traité des propriétés des Rhomboèdres sera dans tous les tems très-intéressant pour les géomètres, et très-utile aux minéralogistes.

Caractères que M. Haüy emploie pour les rhomboèdres

Pour définir le caractère principal des rhomboèdres, M. Haüy emploie le rapport entre les deux diagonales de ses faces. Cependant il y joint aussi quelquefois d'autres indications qui donnent un rapport plus simple. M. Haüy place un rhomboèdre de manière que son axe, c'est-à-dire, la ligne qui joint les deux angles solides formés de trois angles plans égaux soit verticale; il distingue ensuite les deux diagonales d'un des rhombes, en appelant *oblique* celle qui part de l'axe, et *horizontale*, celle qui ne rencontre point l'axe; et il appelle *g* la demi-diagonale horizontale, et *p* la demi-diagonale oblique. On sent qu'en comparant ainsi leurs moitiés, le rapport reste le même. Nous conserverons cette indication dans le tableau suivant, où nous avons réuni toutes les formes primitives rhomboèdres décrites par M. Haüy, avec les valeurs de *g* et de *p* qu'il a données pour chacune.

Tableau des rhomboèdres d'après M. Haüy.

| | |
|-----------------------------------|--|
| Chaux carbonatée. | $g : p :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$ |
| Quartz. | $\sqrt{15} : \sqrt{13}$ |
| Corindon. | $\sqrt{15} : \sqrt{17}$ |
| Tourmaline. | $\sqrt{7} : \sqrt{3}$ |
| Dioptase. | $\sqrt{36} : \sqrt{17} :: 6 : \sqrt{17}$ |
| Chabasia. | $\sqrt{17} : \sqrt{15}$ |
| Argent antimonié sulfuré. | $\sqrt{5} : \sqrt{3}$ |

| | |
|--------------------------|---------------------------------|
| Plomb phosphaté. | $g : p :: \sqrt{12} : \sqrt{7}$ |
| Fer oligiste. | $\sqrt{9} : \sqrt{10}$ |
| Fer sulfaté. | $\sqrt{7} : \sqrt{10}$ |

Il ajoute quelques autres indications géométriques pour le quartz, la diopase, la chabasia, et l'argent antimonié sulfuré.

Ainsi, dans l'argent antimonié sulfuré, il donne pour le petit angle plan, le rapport suivant qui est très-simple; $\cos : \text{rayon} :: 1 : 3$.

Additions: pour l'argent antimonié sulfuré. Pour la chabasia.

Dans la chabasia, on a pour la moitié du grand angle d'incidence, le rapport $\sin : \cos :: \sqrt{8} : \sqrt{7}$, toujours d'après M. Haüy; et l'on doit remarquer que les expressions qu'il donne pour la chabasia et le corindon, sont inverses l'une de l'autre.

M. Haüy a décrit un autre rhomboèdre de diopase qu'il regarde comme secondaire, et dont le signe de décroissement est *B*. Le rapport qu'il donne pour ce rhomboèdre est :

Pour la diopase.

$$g : p :: \sqrt{9} : \sqrt{8}$$

La note qu'il a ajoutée au quartz a un but plus important, et mérite une attention plus sérieuse. En effet, le quartz ne présente que rarement des cristaux rhomboèdres; au contraire, il affecte presque toujours la forme d'une pyramide hexaèdre composée de la jonction de deux rhomboèdres semblables à celui indiqué au tableau ci-dessus; l'un de ces rhomboèdres est regardé par M. Haüy, comme primitif, et l'autre comme secondaire, quoiqu'il n'y ait aucune espèce de différence entre l'un et l'autre. Aussi M. Haüy paraît-il être incertain, s'il doit conserver le rhomboèdre pour

Pour le quartz.

forme primitive du quartz, ou s'il ne doit pas lui substituer un dodécaèdre bipyramidal, composé de deux pyramides comme celle que nous venons d'indiquer. Cette forme pyramidale présente déjà un rapport géométrique beaucoup plus simple que celui indiqué entre les deux diagonales du rhomboèdre, puisqu'on trouve que la perpendiculaire menée du centre sur le côté de la base, est à la hauteur de la pyramide $::\sqrt{5} : \sqrt{8}$.

Il est facile de reconnaître que le rapport entre les deux lignes que l'on vient de désigner, est le même que celui entre le sinus et le cosinus de l'inclinaison de chacun des plans de la pyramide ou du dodécaèdre triangulaire isocèle, à l'axe.

Substitution du rapport entre le sinus et le cosinus de l'inclinaison à l'axe.

Ainsi, dans l'incidence des plans à l'axe, on a $\sin : \cos :: \sqrt{5} : \sqrt{8}$. Ce rapport entre le sinus et le cosinus de l'angle d'incidence des plans à l'axe, peut être employé comme caractère géométrique principal de tous les rhomboèdres, et je préfère le substituer au rapport entre les deux diagonales des faces que M. Haüy a adopté; car ces lignes diagonales, qui n'existent qu'à la surface du solide, ne peuvent donner une expression précise de ses lois fondamentales internes, et elles ne sont que le résultat nécessaire de causes plus importantes. Lorsque l'on considère isolément un des plans, et le rapport entre ses diagonales, on n'embrasse pas l'idée générale du solide; il est à craindre que s'occupant d'un seul plan, on ne saisisse pas l'ensemble du système; et cela seul prouve que l'on n'a pas attaqué le véritable centre des observations. Au contraire, l'axe est de toutes les

parties d'un solide, celle qui doit toujours être préférée pour servir de terme de comparaison; et il ne peut y avoir aucune détermination plus importante que celle de la position de chaque plan du cristal par rapport à l'axe, c'est-à-dire, l'angle qu'ils forment avec lui; et la géométrie nous a présenté, que la meilleure manière de mesurer un angle est de déterminer le rapport entre son sinus et son cosinus.

Il est facile, dans un rhomboèdre, de trouver le rapport entre le sinus et le cosinus de l'incidence des plans à l'axe, lorsque l'on connaît le rapport entre les diagonales de ses plans; et de même, de trouver ce rapport des diagonales lorsqu'on connaît le rapport entre le sinus et le cosinus de l'incidence des plans à l'axe. Prenons pour rayon de l'angle d'inclinaison à l'axe, la demi-diagonale oblique ou longitudinale ci-dessus = p . Le sinus sera la perpendiculaire abaissée du centre du rhombe sur l'axe; et le cosinus sera la partie de l'axe comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le sommet.

Moyens de trouver le rapport par l'une des diagonales.

Soit le sinus = s et le cosinus = c . On a $p = \sqrt{s^2 + c^2}$, d'où l'on tire

$$s = \sqrt{p^2 - c^2} \text{ et } c = \sqrt{p^2 - s^2}$$

Mais la demi-diagonale horizontale, ou $g = \sqrt{3} \times s$; car les trois lignes g , s , et la perpendiculaire menée de l'angle contigu à g sur l'axe, sont toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe, et forment entre elles un triangle rectangle dont les angles aigus sont de 60° et 30° (1); l'angle droit est situé sur le centre

(1) Car ce plan est une section transversale du rhomboèdre par ses trois angles latéraux, et cette section est un

du plan primitif, l'angle de 60° sur l'axe et l'angle de 30° sur l'angle solide latéral. Or, dans un triangle rectangle de ce genre, les côtés sont entre eux comme 1 : $\sqrt{3}$: 2. C'est-à-dire, que en supposant ici $s = 1$, on a $g = \sqrt{3}$, et la troisième ligne ou l'hypothénuse = 2; donc $g : s :: \sqrt{3} : 1$, donc $g = \sqrt{3} \times s$; donc si on connaît g , on a $s = \frac{g}{\sqrt{3}}$.

Ainsi connaissant g et p , cette équation donnera la valeur de s , et on aura celle de c par l'équation ci-dessus $c = \sqrt{p^2 - s^2}$. Ou si l'on connaît s et c , on pourra aussi facilement trouver g et p .

Les formules pour trouver g et p , s et c étant connues, celles pour trouver s et c , en connaissant g et p , se réduisent aux proportions suivantes :

$$g : p :: \sqrt{3} \times s : \sqrt{s^2 + c^2} :: s : \sqrt{\frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}c^2},$$

et

$$s : c :: \frac{g}{\sqrt{3}} : \sqrt{p^2 - \frac{g^2}{3}} :: g : \sqrt{3p^2 - g^2}.$$

Tableau des rhomboèdres d'après le nouveau rapport.

Donnons donc maintenant un tableau des rapports du sinus au cosinus dans l'incidence à l'axe de tous les rhomboèdres, tels qu'ils résultent des données de M. Haüy, et joignons-

triangle équilatéral. Mais notre ligne s est une perpendiculaire menée du centre sur le côté de ce triangle, et elle fait un angle de 60° avec la ligne menée du centre à l'angle adjacent à cette ligne,

y également les mêmes rapports pour les dodécaèdres birhomboèdres.

| | | |
|---|--------------|---------------------------------------|
| Chaux carbonatée. | sin : cos :: | 1 : 1 |
| Quartz. | | $\sqrt{5} : \sqrt{8}$ |
| Corindon. | | $\sqrt{5} : \sqrt{12}$ |
| Tourmaline. | | $\sqrt{7} : \sqrt{2}$ |
| Dioptase. | | $\sqrt{12} : \sqrt{5}$ (1) |
| Dioptase. Le rhomboèdre secondaire dans lequel $g : p :: \sqrt{9} : \sqrt{8}$ | | $\sqrt{3} : \sqrt{5}$ |
| Chabasia. | | $\sqrt{17} : \sqrt{28}$ |
| Argent antimonisé sulfuré. | | $\sqrt{5} : \sqrt{4} :: \sqrt{5} : 2$ |
| Plomb phosphaté. | | $\sqrt{4} : \sqrt{3} :: 2 : \sqrt{3}$ |
| Fer oligiste. | | $\sqrt{3} : \sqrt{7}$ |
| Fer sulfaté. | | $\sqrt{7} : \sqrt{23}$ |

Continuons ce tableau, en y ajoutant les formes dont il a été question au paragraphe précédent (à l'exception de la télésie, aujourd'hui réunie par M. Haüy au corindon), et joignons-y le cube, qui n'est pas étranger au rhomboèdre, puisqu'il tient le milieu entre les rhomboèdres aigus et les rhomboèdres obtus; associons aussi au cube la forme du mercure sulfuré ou cinabre, nous aurons :

Tableau semblable pour les prismes hexaèdres et pour le cube.

| | | |
|--|--------------|-----------------------|
| Chaux phosphatée. | sin : cos :: | $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ |
| Émeraude. | | $\sqrt{3} : 1$ |
| Népheline. | | $\sqrt{7} : \sqrt{2}$ |
| Le cube avec le mercure sulfuré. | | 1 : $\sqrt{2}$ |

(1) On voit ici que le rapport du sinus au cosinus de l'incidence à l'axe dans la dioptase, est inverse de celui du corindon; comme dans le tableau précédent des rapports des diagonales, le rapport de la chabasia est inverse de celui du corindon.

Ces rapports sont en général plus simples que ceux par les diagonales.

Si l'on compare la table des rapports entre les diagonales, telle que nous l'avons donnée ci-dessus d'après M. Haüy, avec cette dernière table des rapports entre les sinus et cosinus de l'inclinaison à l'axe, on reconnaîtra facilement que celle-ci présente des rapports plus simples, si ce n'est pour la chabasié et le fer sulfaté. Mais il faut observer, que jusqu'ici nous n'avons voulu rien changer aux données géométriques admises par M. Haüy; et en outre, on peut avancer que cet illustre auteur ne peut être parfaitement assuré de celles qu'il a adoptées pour la chabasié et le fer sulfaté, et s'il y a quelques rhomboèdres dont la définition géométrique exige quelque modification, on a tout lieu de présumer que celle des deux espèces que nous venons de citer sont dans ce cas. Enfin, quoiqu'il soit vrai que les rapports $\sqrt{17} : \sqrt{15}$ et $\sqrt{7} : \sqrt{10}$ soient plus simples que ceux $\sqrt{17} : \sqrt{28}$ et $\sqrt{7} : \sqrt{23}$, cependant les premiers n'ont pas un assez grand degré de simplicité, et les seconds ne sont pas assez composés pour que l'on ait beaucoup à regretter.

On observe au contraire (et ceci est bien plus essentiel), que toutes les formes dont on est le plus assuré de connaître le véritable caractère géométrique, parce qu'on a eu plus de moyens et plus de facilités pour les observer; celles enfin qui sont les plus importantes, soit par elles-mêmes, soit par le rôle qu'elles jouent dans la nature, ont une expression plus simple dans ce second tableau, où l'on a employé le rapport du sinus au cosinus de l'incidence à l'axe. Cette simplification est surtout remarquable dans la chaux carbonatée, le quartz et le plomb phosphaté.

phaté. On peut aussi y ajouter la chaux phosphatée et l'émeraude.

En effet, le rapport 1 : 1 est infiniment plus simple que celui $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; celui $\sqrt{3} : \sqrt{8}$, que celui $\sqrt{15} : \sqrt{13}$, et cette augmentation de simplicité peut nous donner lieu d'espérer que nous sommes déjà moins éloignés de la découverte des causes physiques des phénomènes de la cristallisation.

On objectera sans doute que dans le cube, le rapport des diagonales 1 : 1 est beaucoup plus simple que celui du sinus au cosinus de l'incidence à l'axe, qui est 1 : $\sqrt{2}$; mais il est facile de répondre à cette objection. D'abord il y a beaucoup de minéralogistes qui ne veulent point considérer le cube comme une variété du rhomboèdre. Le cube n'a pas un axe unique, mais trois axes qui sont absolument identiques sous tous les rapports. Il n'y a donc pas dans le cube, comme dans le rhomboèdre, une ligne unique à laquelle toutes les dimensions du solide se rapportent. Mais en outre, s'il est une forme qui ait avec le cube une liaison intime, c'est l'octaèdre régulier; on sait que ces deux formes peuvent être transformées l'une dans l'autre par des moyens très-simples. Or, si l'on étudie, sous le rapport qui nous occupe, les propriétés de l'octaèdre régulier, on trouve que dans l'angle d'inclinaison de chacune de ses faces à l'axe, le rapport du sinus au cosinus est 1 : $\sqrt{2}$, ce qui présente une identité satisfaisante avec le cube. Conservons donc ce rapport qui assimile ainsi le cube et l'octaèdre; car il est très-intéressant de voir que ces deux formes qui ont

Réponse à l'objection tirée du cube.

tant d'affinité entre elles, ont précisément la même inclinaison à l'axe.

Préférence à accorder à ces rapports. Ainsi nous ne craignons pas d'avancer que c'est dans le rapport du sinus au cosinus de l'inclinaison à l'axe, qu'il faut chercher le caractère géométrique principal de toutes les formes dont nous avons parlé jusqu'ici.

Calcul de toutes les lignes et angles du rhomboèdre, en valeurs du sinus et du cosinus de l'inclinaison à l'axe. Or, de même que M. Haüy a employé le rapport des diagonales pour calculer les valeurs algébriques des autres lignes et des angles du rhomboèdre qui servent à déterminer les formes secondaires, de même nous pouvons aussi exprimer toutes ces lignes et angles par des fonctions du sinus et du cosinus de l'angle d'inclinaison à l'axe, ainsi, notre rapport entre ce sinus et ce cosinus peut servir de base à tout le calcul des formes secondaires; et on verra bientôt que l'on obtient de cette manière des expressions très-simples et généralement plus simples que celles que l'on déduit des rapports entre les deux diagonales.

Valeurs des lignes.

Ainsi, par exemple, en prenant la demi-diagonale oblique pour le rayon de l'angle d'incidence du plan à l'axe, et conservant à s , c , p et g , leurs valeurs indiquées ci-dessus, on aura l'axe du rhomboèdre $= 3c$; la demi-perpendiculaire à l'axe, telle que l'indique M. Haüy, $= s$; la demi-diagonale oblique $p = \sqrt{s^2 + c^2}$; la demi-diagonale horizontale $g = \sqrt{3} \times s$; et le côté du rhombe $= \sqrt{4s^2 + c^2}$.

Valeur de l'angle linéaire du rhombe.

Dans la moitié de l'angle terminal du rhombe, on aura $\sin : \cos :: g : p :: \sqrt{3} \times s : \sqrt{s^2 + c^2}$; et pour la moitié de l'angle latéral du rhombe, on aura $\sin : \cos :: p : g :: \sqrt{s^2 + c^2} : \sqrt{3} \times s :: \sqrt{\frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}c^2} : s$.

On peut enfin déterminer les angles des plans entre eux; cherchons d'abord l'angle que forment deux plans contigus au même sommet ou l'angle plan terminal.

Valeur de l'angle plan terminal, ou de sa moitié.

Au lieu de l'angle entier, nous pouvons ne considérer que la moitié de cet angle; déterminons son rayon, son sinus et son cosinus, et prenons pour son rayon g , la perpendiculaire menée du centre d'un des rhombes sur le côté de ce rhombe.

Alors le sinus σ sera la moitié d'une ligne menée du centre d'un rhombe au centre du rhombe adjacent vers le même sommet. Or, cette ligne entière sera $= g$, car elle forme avec les deux demi-diagonales des deux rhombes adjacens un triangle équilatéral; ce qui résulte de ce qui a été dit plus haut de la section transversale horizontale; donc $\sigma = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times s = \sqrt{\frac{1}{4}s^2}$.

Son sinus.

Pour chercher le cosinus χ , observons que la perpendiculaire à l'axe indiquée par M. Haüy, et qui est $= 2s$, est partagée par notre ligne σ en deux parties, qui sont entre elles comme $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$, ou dont les valeurs seront comme $\frac{1}{2}s : \frac{1}{2}s$; ou, suivant une expression plus générale que nous emploierons souvent, cette ligne sera partagée en deux parties $\pi + \pi' = \frac{g^2}{2s} + \frac{s^2}{2s}$.

Son cosinus.

Maintenant on peut déterminer le cosinus χ par un triangle rectangle dont il est un des côtés de l'angle droit, et dont l'hypothénuse est la ligne $\frac{1}{2}s$.

Car ce triangle est semblable à un autre triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont la ligne c et la perpendiculaire à l'axe, et dont l'hypothénuse est le côté terminal du rhombe.

boèdre que nous supposons = m . Nous aurons donc cette proportion $m : c :: \frac{1}{2} s : \chi$.

D'où l'on tire $\chi = \frac{c \times \frac{1}{2} s}{m}$ et en substituant pour m sa valeur = $\sqrt{4s^2 + c^2}$.

$$\chi = \frac{c \times \frac{1}{2} s}{\sqrt{4s^2 + c^2}} = \frac{3cs}{\sqrt{16s^2 + 4c^2}} = \frac{\sqrt{9c^2 s^2}}{16s^2 + 4c^2}$$

Son rayon.

Le rayon

$$\rho = \frac{p \times g}{m} = \frac{\sqrt{3} \times s \times \sqrt{s^2 + c^2}}{\sqrt{4s^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{3s^4 + 3c^2 s^2}}{4s^2 + c^2}$$

On aurait aussi pu faire le rayon $\rho = \sqrt{s^2 + \chi^2}$, ce qui en substituant les valeurs de σ et de χ ,

donne $\rho = \sqrt{\frac{1}{4} s^2 + \frac{9c^2 s^2}{16s^2 + 4c^2}}$; valeur qui revient à

celle-ci, $\rho = \frac{\sqrt{3s^4 + 3c^2 s^2}}{4s^2 + c^2}$, la même que ci-dessus.

$$\text{Donc } \sigma : \chi : \rho :: \sqrt{\frac{1}{4} s^2} : \frac{\sqrt{9c^2 s^2}}{16s^2 + 4c^2} : \frac{\sqrt{3s^4 + 3c^2 s^2}}{4s^2 + c^2}$$

$$:: 1 : \frac{\sqrt{3c^2}}{4s^2 + c^2} : \frac{\sqrt{4s^2 + 4c^2}}{4s^2 + c^2} :: \sqrt{4s^2 + c^2} : \sqrt{3c^2} : \sqrt{4s^2 + 4c^2}$$

Donc dans la moitié de l'angle plan entre deux faces contiguës au même sommet, le sinus est au cosinus ou $\sigma : \chi :: \sqrt{4s^2 + c^2} : \sqrt{3c^2}$. En outre, le sinus est au rayon ou $\sigma : \rho :: \sqrt{4s^2 + c^2} : \sqrt{4s^2 + 4c^2}$, et enfin le cosinus est au rayon ou

$$\chi : \rho :: \sqrt{3c^2} : \sqrt{4s^2 + 4c^2}$$

Mais si l'on observe que l'expression $\sqrt{4s^2 + c^2}$ est aussi la valeur du côté du rhombe que nous avons appelé m , que la demi-diagonale oblique p a pour valeur $\sqrt{s^2 + c^2}$, que par conséquent l'expres-

Propriété du rhomboèdre.

sion $\sqrt{4s^2 + 4c^2} = 2\sqrt{s^2 + c^2} = 2p$, on reconnaîtra que le rapport ci-dessus $\sigma : \rho :: \sqrt{4s^2 + c^2} : \sqrt{4s^2 + 4c^2}$ peut se changer en celui-ci $\sigma : \rho :: m : 2p$; d'où l'on tire cette belle proposition: que dans un rhomboèdre, le rayon est au sinus de la moitié de l'angle plan entre deux faces adjacentes contiguës au même sommet, comme la diagonale oblique est au côté du rhombe (1).

Connaissant l'angle plan entre deux faces contiguës au même sommet, on conçoit facilement que l'on aura aussi la valeur de l'angle plan entre deux faces contiguës à deux sommets différens, puisque ce dernier est le supplément du premier.

M. Haüy appelle *section principale* du rhomboèdre, cette section qu'y forme un plan mené par deux arêtes terminales et deux diagonales obliques parallèles opposées, lequel plan passe par l'axe. Nous aurons aussi facilement les angles de la figure de cette section principale. En effet, celui des angles de cette figure qui correspond au sommet, se compose de deux angles, dont l'un est l'angle d'inclinaison d'un plan à l'axe, et l'autre est l'angle d'inclinaison d'un côté terminal à l'axe.

Dans ce premier, le rapport du sinus au co-

(1) Nous avons vu que la demi-diagonale horizontale $g = \sqrt{3s^2}$. Ici nous avons $\chi = \sqrt{3c^2}$, donc $\chi : g :: c : s$, donc $\chi = \frac{cg}{s}$; on peut encore trouver une autre expression du cosinus χ en d'autres lignes du rhomboèdre, car $\chi = \sqrt{3c^2} = \sqrt{3} \times c = \frac{3c}{\sqrt{3}}$; mais nous avons vu que l'axe $= 3c$, donc on a $\chi = \frac{axc}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x}{3}} \times axc$.

Angles de la section principale.

sinus est comme $s : c$, et nous allons faire voir que dans le second, le sinus est au cosinus comme $2s : c$, car dans cet angle, le côté terminal du rhomboèdre étant pris pour rayon, le sinus doit être égal à la perpendiculaire sur l'axe que nous avons vu être $= 2s$.

La somme de ces deux angles donne pour la section principale l'angle contigu au sommet, et connaissant cet angle, on connaît aussi son supplément, qui est l'angle latéral de cette même section.

Il serait très-facile, au moyen de ces expressions des lignes et des angles d'un rhomboèdre en valeurs du sinus et du cosinus de l'angle d'inclinaison d'un plan à l'axe, de calculer ses formes secondaires.

Ainsi, par exemple, le rhomboèdre secondaire dont le signe est B , a une incidence de ses faces à l'axe égal à celle d'un côté terminal du rhomboèdre primitif, et nous avons vu que dans cet angle, le sinus est au cosinus comme $2s : c$.

On conçoit que de ce seul rapport on peut déduire toutes ses propriétés, comme on l'a fait voir pour tout rhomboèdre en général.

Dans le rhomboèdre secondaire que M. Haüy indique par le signe $E E'$ (1), on a pour l'angle d'incidence d'un plan à l'axe, le sinus est au cosinus comme $s : 2c$ ou comme $\frac{1}{2}s : c$.

On voit donc que le genre de calcul que nous avons adopté, nous donne le moyen de déter-

(1) Je préférerais l'expression e qui produit la même forme.

miner toutes les formes secondaires. Mais nous ne nous étendrons pas davantage sur cet objet. Nous pensons que ce que nous en avons dit est bien suffisant pour faire reconnaître que notre formule par le sinus et le cosinus de l'incidence d'un plan à l'axe n'est pas moins propre que celle de M. Haüy, par les deux demi-digonales, pour déterminer les formes des rhomboèdres.

Non-seulement toutes les formes que nous avons examinées jusqu'ici se rapportent à une seule et même classe de formes cristallines, mais elles comprennent cette classe toute entière, en sorte qu'il ne nous reste aucune forme à examiner qui puisse s'y rapporter.

Mais cette classe se divise évidemment en deux sections ou genres, dont l'une comprend les véritables rhomboèdres ou les rhomboèdres simples terminés par six rhombes égaux et semblables et parallèles deux à deux, et l'autre renferme ces solides composés de douze triangles égaux et semblables et parallèles deux à deux, que l'on peut considérer comme étant formés de la réunion de deux rhomboèdres, dont l'un a ses faces entre celles de l'autre, de manière qu'il en résulte un dodécaèdre bipyramidal à plans triangulaires isocèles égaux et semblables. Le quartz, le plomb phosphaté, la chaux phosphatée, l'émeraude, et la népheline, se rapportent à ce genre de forme; toutes les autres se rapportent au premier.

Le calcul de ces dodécaèdres composés de deux pyramides hexaèdres droites à plans triangulaires isocèles, est semblable au calcul des

A a 4

Birhombôdres, ou dodécaèdres triangulaires isocèles.

Calcul de ces birhombôdres par les sinus et cosinus de l'inclinaison à l'axe.

rhomboèdres; cependant il a aussi ses formules particulières.

Soit l la base d'un des triangles, et soit r une perpendiculaire abaissée du sommet sur cette base. Cette ligne r peut être considérée comme le rayon de l'angle d'inclinaison de ce triangle à l'axe; alors le sinus s sera la ligne menée du centre au milieu de l , et le cosinus c sera la hauteur de la pyramide. L'axe $a = 2c$.

On aura cette proportion $\frac{1}{2}l$ ou $\frac{l}{2} : s :: 1 : \sqrt{3}$; d'où l'on tire $\frac{l}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \times s$ et, $l = \sqrt{\frac{4}{3}} \times s$. Ces lignes $\frac{l}{2}$ et r seront analogues à g et p dans le rhomboèdre.

Angle linéaire au sommet.

L'angle au sommet de chaque triangle sera déterminé, puisque dans sa moitié le sinus est au cosinus comme

$$\frac{l}{2} : r :: \sqrt{\frac{1}{3}} \times s : \sqrt{s^2 + c^2} :: s : \sqrt{3s^2 + 3c^2}.$$

Soit d la ligne menée du centre à un angle de la base, elle est égale à l ; donc $d = \sqrt{\frac{4}{3}} s$.

Soit m le bord terminal, on a :

$$m = \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{\frac{4}{3}s^2 + c^2};$$

on aurait eu la même valeur en faisant :

$$m = \sqrt{\frac{l^2}{4} + r^2} = \sqrt{\frac{4}{3}s^2 + c^2}.$$

Angle entre deux faces adjacentes contiguës au même sommet.

Déterminons maintenant l'angle entre deux plans adjacens et contigus au même sommet. Nous considérerons seulement la moitié de cet angle, et nous désignerons comme ci-dessus, son sinus, son cosinus, et son rayon par σ , χ et ρ .

Le sinus sera la perpendiculaire menée du milieu de l sur d ; le cosinus sera la perpendiculaire du pied de la première dans d , sur m ;

et le rayon la perpendiculaire menée du milieu de l sur m . Ces trois lignes seront dans un même plan qui mesurera l'incidence de deux faces adjacentes d'une même pyramide.

Mais σ est égale à la moitié d'une ligne menée du milieu de la ligne l au milieu d'une autre ligne l adjacente; cette ligne forme avec les deux lignes s adjacentes, un triangle équilatéral; donc cette ligne = s , donc $\sigma = \frac{1}{2}s$.

Valeur du sinus.

σ divise la ligne d en deux parties d et d' dont voici les expressions :

$$d : \frac{l}{2} :: \frac{l}{2} : d, \text{ et comme } d = l, \text{ on a } 2 : 1 :: \frac{l}{2}$$

$$: d = \frac{l}{4}; \text{ et substituant pour } l \text{ sa valeur } \sqrt{\frac{4}{3}}s,$$

$$\text{on a } d = \sqrt{\frac{1}{12}}s.$$

Ensuite $d : s :: s : d' = \frac{s^2}{d}$, et substituant pour

$$d \text{ sa valeur } = \sqrt{\frac{1}{12}}s, \text{ on tire } d' = \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{\frac{12}{1}}s.$$

Ces valeurs étant déterminées, on peut trouver χ par la proportion suivante, fondée sur la similitude entre deux triangles; $m : c :: d' : \chi$;

Valeur du cosinus.

$$\text{donc } \chi = \frac{d'c}{m} = \frac{cs}{\sqrt{12} \cdot m} = \frac{cs}{\sqrt{16s^2 + 12c^2}}.$$

Enfin le rayon

Valeur du rayon.

$$\rho = \frac{r \times \frac{l}{2}}{m} = \frac{\sqrt{s^2 + c^2} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \times s}{\sqrt{\frac{4}{3}s^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{s^2 + c^2} \times s}{\sqrt{4s^2 + 3c^2}} = \frac{\sqrt{s^4 + s^2c^2}}{\sqrt{4s^2 + 3c^2}}.$$

$$\text{On a donc } \sigma : \chi : \rho :: \frac{s}{2} : \frac{cs}{\sqrt{16s^2 + 12c^2}} : \frac{\sqrt{s^4 + s^2c^2}}{4s^2 + 3c^2}$$

Rapport général.

$$:: 1 : \frac{c}{\sqrt{4s^2 + 3c^2}} : \frac{2\sqrt{s^2 + c^2}}{\sqrt{4s^2 + 3c^2}} :: \sqrt{4s^2 + 3c^2} : c : 2\sqrt{s^2 + c^2}$$

$$:: \sqrt{3} \times m : c : 2r.$$

Propriété
des birhomboèdres.

Ainsi nous avons dans ces dodécaèdres birhomboèdres une propriété analogue à celle que nous avons reconnue dans les rhomboèdres, et non moins intéressante. En effet, dans ce dernier nous avons eu $\sigma : \rho :: m : 2p :: m : 2r$ et $\chi = \sqrt{3}c$, et dans le dodécaèdre nous avons $\chi : \rho :: c : 2r$ et $\sigma = \sqrt{3}m$. Propriété que l'on peut exprimer ainsi : dans la moitié de l'angle entre deux faces adjacentes d'une même pyramide d'un dodécaèdre triangulaire isocèle, le cosinus est au rayon comme le cosinus de l'incidence d'un des plans à l'axe est au double du rayon ; ou comme le demi-axe du dodécaèdre est au double de l'apothème d'un des triangles.

Détermination des autres angles des birhomboèdres.

Les autres incidences des plans du dodécaèdre triangulaire sont maintenant faciles à trouver. Ainsi, l'incidence d'un plan sur son opposé, au même sommet, est le double de l'incidence d'un plan à l'axe.

L'incidence d'un plan sur le troisième plan (celui qui n'est séparé de lui que par le plan adjacent commun) est l'incidence de deux plans adjacents contigus au même sommet dans le rhomboèdre simple.

L'incidence d'un plan sur le plan adjacent dans l'autre pyramide, est le supplément du double de l'incidence d'un plan à l'axe.

L'incidence d'un plan sur le plan de l'autre pyramide qui ne les touche qu'en un point sur un angle latéral, est égal à l'angle de deux faces non contiguës au même sommet dans le rhomboèdre simple ; et ainsi de suite.

Nous bornerons là ce que nous avons à dire sur nos dodécaèdres birhomboèdres.

Il faut bien observer que dans ces solides, chaque pyramide n'est pas composée de six faces, mais de deux fois trois faces, de manière qu'elles alternent réciproquement et se correspondent l'une à l'autre ; c'est une vérité dont le quartz surtout nous fournit des preuves évidentes. Aussi M. Haüy est-il resté dans le doute s'il devait choisir pour forme primitive de cette espèce, le rhomboèdre ou le dodécaèdre bipyramidal. Car s'il était facile, en choisissant trois plans alternans pour forme primitive, d'en faire dériver les trois autres par une loi de décrois-

Résumé
sur ces birhomboèdres.

sement simple $\frac{1}{2}$, il y avait beaucoup de difficulté à faire provenir d'un seul rhomboèdre les autres plans qui appartiennent à la cristallisation du quartz, et qui ont un égal rapport avec les deux rhomboèdres, dont cependant l'un aurait été la forme primitive, et l'autre une forme secondaire. Ce rhomboèdre secondaire ne présentait aucun caractère qui pût le faire distinguer du primitif. L'observation indiquait donc que la forme primitive n'était pas seulement un solide à trois faces, mais qu'elle était composée de deux solides à trois faces, tous deux également nécessaires, remplissant le même rôle dans la forme primitive, et cependant, constituant en quelque sorte deux systèmes séparés dans la forme primitive ; et cette admission, qui paraissait s'accorder difficilement avec la théorie moléculaire de la cristallisation, n'est point contraire aux principes que nous avons adoptés. En un mot, nous avons jugé devoir réunir dans une même classe de cristaux, tous ceux qui sont terminés par une

association triple de plans égaux et semblables (et d'autres parallèles). Parmi ces cristaux, il en est qui sont terminés par trois plans seulement, et d'autres qui sont composés de deux fois trois plans, ces deux systèmes alternant ensemble, se croisant réciproquement, et tous deux parfaitement semblables. Nous ne connaissons aucune exception.

Toutes les autres formes se rapportent à quatre plans.

Il s'agit maintenant de prouver que toutes les autres formes cristallines se rapportent à deux fois deux plans (deux plans parallèles étant comptés pour un seul), ou que toutes les autres formes primitives quelconques sont composées de deux fois deux plans. C'est ce dont il va être question.

IV. Des octaèdres droits à bases carrées.

Il y a une telle différence entre les rhomboèdres et les autres parallélipèdes, que non-seulement il faut absolument séparer ces deux genres de formes, mais qu'il faut même placer entre eux un autre genre de forme, les *octaèdres*, qui ont le plus souvent avec les parallélipèdes bien plus de rapports et de points de comparaison que les rhomboèdres. En effet, il y a certains genres de parallélipèdes qui, considérés comme formes primitives, ont bien plus d'analogie avec certaines formes d'octaèdres qu'avec les autres parallélipèdes.

Ce rapport entre ces deux formes, quoique peu apparent, est cependant plus certain et plus réel que cette ressemblance spacieuse qui paraîtrait devoir réunir entre eux tous les parallélipèdes, aussi préférons-nous de le suivre;

et pour cela, nous commencerons par examiner cette série particulière d'octaèdres qui comprend ceux composés de triangles isocèles égaux et semblables, et par conséquent formés de deux pyramides droites à base carrée; car les octaèdres de ce genre ont une plus grande régularité, et ont plus d'analogie que les autres avec l'octaèdre régulier de la géométrie, qui même, si l'on veut, peut être considéré comme n'étant qu'une espèce de ce genre, puisqu'il a avec eux une propriété commune, d'être formé de plans tous également inclinés à l'axe.

M. Haüy emploie le rapport entre la hauteur d'une pyramide et le côté ou le demi-côté de la base pour exprimer le caractère principal de ce genre d'octaèdres. Quelquefois il y ajoute certaines indications géométriques. Ainsi, par exemple, pour le zircon il donne le rapport des côtés d'un des triangles égaux formés sur une quelconque des faces, par une perpendiculaire abaissée du sommet sur le côté de la base.

Rapports employés par M. Haüy.

Le tableau suivant renferme les rapports adoptés par M. Haüy pour déterminer les différentes formes octaèdres à base carrée.

Zircon. Le bord terminal, la perpendiculaire du sommet sur le côté de la base, et le demi-côté de la base sont :: 5 : 4 : 3.

Anatase. Le demi-côté de la base est à la hauteur de la pyramide :: $\sqrt{2}$: $\sqrt{13}$.

Harmotome. Le côté de la base est à la hauteur de la pyramide :: 3 : $\sqrt{2}$; ou la demi-dia-

gonale de la base est à la hauteur de la pyramide :: 3 : 2.

Méllite. Le demi-côté de la base est à la hauteur de la pyramide :: $\sqrt{8} : \sqrt{9}$.

Plomb molybdaté. Le côté de la base est à la hauteur de la pyramide :: $2\sqrt{8} : \sqrt{5}$.

Il est évident que le demi-côté de la base et la hauteur de la pyramide ne sont autre chose que le sinus et le cosinus de l'incidence d'un plan quelconque à l'axe. Ainsi, si nous adoptons pour déterminer le caractère principal de ces octaèdres la méthode que nous avons suivie jusqu'ici pour les rhomboèdres, nous nous trouvons conduits naturellement à des rapports analogues à ceux du tableau précédent. Ainsi pour le zircon, le rapport entre la perpendiculaire du sommet sur le côté de la base, et le demi-côté de la base étant 4 : 3, on en conclut facilement que le rapport entre le demi-côté de la base et la hauteur de la pyramide est :: 3 : $\sqrt{7}$, car cette hauteur = $\sqrt{p^2 - l^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

Mais avant de changer le tableau précédent en un autre qui contienne les rapports entre le sinus et le cosinus des incidences des plans à l'axe, il ne sera pas inutile d'examiner un autre genre de forme qui a les plus grands rapports avec les octaèdres à base carrée; c'est un genre particulier de parallépipède admis par M. Haüy comme forme primitive, et qui peut indifféremment être substitué aux octaèdres qui nous occupent, et réciproquement; je veux parler des parallépipèdes rectangles droits à base carrée. Il est absolument indifférent de choisir pour forme primitive, le prisme ou l'octaèdre

Ces rapports sont analogues à ceux tirés de l'inclinaison à l'axe.

Les prismes droits à base carrée peuvent être rapportés aux octaèdres ci-dessus.

à base carrée, les résultats géométriques sont les mêmes. Ces parallépipèdes et ces octaèdres sont entre eux comme le cube et l'octaèdre régulier, ayant le même rapport entre la hauteur et la largeur. En effet, si l'on suppose un parallépipède inscrit dans un octaèdre donné, de manière que les angles solides du premier correspondent au milieu des faces de l'autre, ou réciproquement un octaèdre inscrit dans un parallépipède donné et de la même manière, on pourra choisir à volonté l'une ou l'autre de ces deux formes pour servir de base à tout le calcul cristallographique. Le rapport entre la hauteur de l'octaèdre et la largeur de sa base serait le même que celui entre la hauteur du parallépipède et la largeur de sa base. Or je pense que l'on doit rejeter absolument du nombre des formes primitives tous ces parallépipèdes sans aucune exception, et leur substituer des octaèdres à base carrée; et mon opinion à cet égard est moins fondée sur des considérations géométriques que sur le résultat de l'observation physique de la cristallisation. Il serait trop long d'exposer ici mes motifs, d'ailleurs cela ne me paraît pas indispensable. On saisira facilement les raisons qui doivent faire adopter de préférence, comme forme primitive, une de ces deux formes indiquées par M. Haüy, lesquelles ont d'ailleurs entre elles les plus grands rapports.

Je vais donc donner d'abord un tableau des cristaux en prismes quadrangulaires rectangles à base carrée avec leurs déterminations géométriques d'après M. Haüy. Ce célèbre minéralogiste a toujours adopté, pour déterminer le

Détermination de ces prismes d'après M. Haüy.

caractère principal, le rapport entre le côté de la base et la hauteur du prisme. Nous appellerons ce côté l , et la hauteur a .

| | |
|--------------------|-------------------------------------|
| Magnésie sulfatée; | $l : a :: \sqrt{6} : 2.$ |
| Idocrase; | $l : a :: \sqrt{7} : \sqrt{8}.$ |
| Meïonite; | $l : a :: \sqrt{21} : 2.$ |
| Wernerite; | $l : a :: \sqrt{8} : \sqrt{3}.$ |
| Mésotype; | $l : a :: \sqrt{5} : 2.$ |
| Plomb chromaté; | $l : a :: \sqrt{5} : 3.$ |
| Étain oxydé; | $l : a :: 1 : 1 (1).$ |
| Titane oxydé; | $l : a :: \sqrt{5} : \sqrt{6} (2).$ |

Différentes manières de changer ces prismes en octaédres.

De ces parallélipèdes on pourra obtenir différens octaédres, suivant les différentes lois de décroissemens de M. Haüy, que l'on emploiera pour les déduire.

Ainsi la loi B donnera un octaèdre dans lequel le rapport entre le sinus et le cosinus de l'incidence d'une face à l'axe est égal au rapport entre le côté de la base du parallélipède et sa hauteur. En effet, le côté de la base est le sinus, et la hauteur du prisme le cosinus de l'incidence; car la loi B désigne un plan secondaire passant par deux bords terminaux opposés, et l'axe de l'octaèdre est

(1) L'étain oxydé a pour forme primitive un cube, mais ce cube a plutôt les propriétés d'un parallélipède que celles du cube.

(2) M. Haüy (t. IV, p. 298, note) indique le rapport $\sqrt{5} : \sqrt{12}$ entre un des côtés de l'angle droit de la base de la molécule intégrante, qui est un prisme triangulaire rectangle isocèle, et la hauteur du prisme, ce qui est la même chose que le rapport entre la demi-diagonale de la base de la forme primitive et la hauteur du prisme. Mais la demi-diagonale de la base est au côté de la base comme $1 : \sqrt{5}$; donc le rapport entre l et a doit être $1 : \sqrt{2} \sqrt{5} : \sqrt{10} :: \sqrt{5} : \sqrt{6}$, ainsi qu'il est annoncé dans le tableau.

nécessairement

nécessairement perpendiculaire à la base du parallélipède.

La loi B donnera un octaèdre dont le plan passera par un des bords terminaux du parallélipède, et coupera la face opposée en deux parties égales. L'axe de l'octaèdre continuera d'être perpendiculaire à la base du prisme; et dans l'incidence d'un plan de l'octaèdre à l'axe, le sinus sera au cosinus comme le côté de la base du prisme est à sa demi-hauteur.

En employant la loi B , ce même rapport serait comme le demi-côté de la base est à la hauteur.

Mais si on fait dériver l'octaèdre primitif de la loi A sur le parallélipède, alors le plan de l'octaèdre sera parallèle au plan passant par la diagonale de la base et par l'angle solide opposé. Dans ce cas, le cosinus de l'incidence sera la hauteur du prisme; et le sinus, la demi-diagonale de la base ou le côté de la base multiplié par $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Si on adoptait la loi A , le sinus d'incidence d'un plan de l'octaèdre à l'axe serait au cosinus comme la diagonale de la base du prisme, ou comme le côté de cette base multiplié par $\sqrt{2}$, est à la hauteur du prisme.

Nouveaux rapports pour les octaédres droits à base carrée.

Cela posé, réunissons dans un même tableau les valeurs des sinus et cosinus de l'incidence d'un plan à l'axe, non-seulement des octaédres à bases carrées que M. Haüy a adoptés pour formes primitives, mais aussi de ces octaédres semblables déduits des formes primitives prismatiques à bases carrées, d'après les règles que

Volume 29.

B b

nous venons d'indiquer, et que nous avons reconnus pouvoir être placés aussi au rang des formes primitives. Ajoutons aussi l'expression des valeurs analogues pour l'octaèdre régulier.

Tableau des octaèdres à pyramides droites à base carrée.

| | | | | | | |
|--|-----|-----|----|-------------|---|----------------------------|
| Octaèdre régulier de la géométrie. | sin | cos | :: | 1 | ∴ | $\sqrt{2}$ |
| Zircon. | sin | cos | :: | 3 | ∴ | $\sqrt{7}$ |
| Anatase. | sin | cos | :: | $\sqrt{2}$ | ∴ | $\sqrt{13}$ |
| Harmotome. | sin | cos | :: | 3 | ∴ | $\sqrt{8}$ |
| Mellite. | sin | cos | :: | $\sqrt{8}$ | ∴ | $\sqrt{9} :: \sqrt{8} : 3$ |
| Plomb molybdaté. | sin | cos | :: | $\sqrt{8}$ | ∴ | $\sqrt{5}$ |
| Magnésie sulfatée (1). | sin | cos | :: | $\sqrt{6}$ | ∴ | $2 :: \sqrt{3} : \sqrt{2}$ |
| Idocrase (2). | sin | cos | :: | $\sqrt{7}$ | ∴ | 2 |
| Meionite (3). | sin | cos | :: | $\sqrt{21}$ | ∴ | $\sqrt{8}$ |
| Wernerite (4). | sin | cos | :: | $\sqrt{8}$ | ∴ | $\sqrt{3}$ |
| Mésotype (5). | sin | cos | :: | $\sqrt{5}$ | ∴ | 1 |

(1) Dans la magnésie sulfatée notre octaèdre se compose des plans n et l (Haüy, *pl. 37, fig. 133*), ils proviennent du décroissement $\frac{1}{2}$ \bar{B} ou \bar{C} .

(2) Pour l'idocrase l'octaèdre primitif me paraît être composé des faces c (Haüy, *pl. 47, fig. 70*), qui proviennent du décroissement $\frac{1}{2}$. Donc $\sin : \cos :: \sqrt{7} \sqrt{2} : \sqrt{8} :: \sqrt{7} : 2$. — Si on préférerait le composer des faces O (*fig. 72*) dont le signe est \bar{B} , on aurait $\sin : \cos :: \sqrt{7} : \sqrt{2}$.

(3) L'octaèdre primitif de la meionite est certainement formé des faces l (Haüy, *pl. 48, fig. 76*), dont le signe est \bar{A} . Donc $\sin : \cos :: \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{21} : 2 :: \sqrt{\frac{1}{2}} : 2 :: \sqrt{21} : \sqrt{8}$.

(4) Le plan primitif du Wernerite est le plan o (*fig. 166, pl. 57, Haüy*), dont le signe est \bar{B} .

(5) Pour la mésotype nous avons supposé l'octaèdre composé des faces o (Haüy, *pl. 58, fig. 174*), dont le signe est \bar{B} . Si on préfère-

| | | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|----|------------|---|-------------|
| Plomb chromaté (1). | sin | cos | :: | $\sqrt{5}$ | ∴ | 3 |
| Etain oxydé (2). | sin | cos | :: | $\sqrt{2}$ | ∴ | 1 |
| Titane oxydé (3). | sin | cos | :: | $\sqrt{5}$ | ∴ | $\sqrt{12}$ |
| Paranthine (4). | sin | cos | :: | $\sqrt{3}$ | ∴ | 1 |

Nous verrons plus bas que le schéelin ferruginé ou wolfram a aussi une forme primitive du même genre que celles ci-dessus, et que son sinus est à son cosinus :: $\sqrt{3} : 2$.

On voit dans le tableau précédent un nouvel exemple des inversions réciproques entre deux formes, c'est entre le mellite et l'harmotome. Comparant ensuite ce tableau avec celui que nous avons donné pour les rhomboèdres, on voit dans celui-ci le rapport entre le sinus et le cosinus, pour le quartz, reparaître dans l'autre,

Observations sur ce tableau.

rait celui composé des faces S (*fig. 175*), dont le signe est \bar{A} , on aurait:

$$\sin : \cos :: \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{5} : 2 :: \sqrt{9 \times \frac{5}{8}} : 2 :: \sqrt{45} : \sqrt{32}.$$

(1) Dans le plomb chromaté les faces r (*pl. 67, fig. 40*), provenant de la loi \bar{B} , paraissent être celles de l'octaèdre primitif.

(2) L'étain oxydé, d'après un examen de tout son système de cristallisation, me paraît avoir pour faces primitives les faces o (*pl. 80, fig. 179*), leur signe est \bar{A} , d'où il résulte que

$$\sin : \cos :: \sqrt{2} \times 1 : 1 :: \sqrt{2} : 1.$$

— Si l'on préférerait l'octaèdre formé des faces s (*fig. 177*) dont le signe est \bar{B} , on aurait $\sin : \cos :: 1 : 1$. Ces faces s sont celles d'un dodécèdre rhomboïdal régulier; et les faces o celle du solide à 24 faces trapézoïdales.

(3) Dans le titane oxydé nous avons choisi pour face primitive le plan $s m n u$ (*pl. 84, fig. 222*), dont le signe est \bar{A} , donc

$$\sin : \cos :: \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{5} : \sqrt{6} :: \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{6} :: \sqrt{5} : \sqrt{12}.$$

(4) Le caractère géométrique de la paranthine est fondé sur des observations récentes de M. Haüy.

mais en sens inverse, pour le plomb molybdaté, de sorte que les angles d'incidence à l'axe dans ces deux espèces sont complémentaires l'un de l'autre; et si au contraire on compare tous les autres rapports d'un des tableaux avec ceux de l'autre, il est remarquable qu'ils n'ont aucune analogie au moins pour la plupart, car il est assez inutile de faire observer l'identité du rapport du titane oxydé avec celui du corindon, non plus que d'autres ressemblances plus éloignées que l'on pourrait trouver, attendu que la plupart de ces caractères géométriques sont encore peu certains.

Valens
des lignes
et angles
dans les oc-
taèdres à
base car-
rée.

Ayant déterminé le caractère des octaèdres à base carrée par le rapport entre le sinus et le cosinus de l'incidence de son plan à l'axe, il sera facile de trouver, au moyen de ce rapport, la valeur des autres lignes et angles de ce genre d'octaèdre, et ses différentes propriétés.

Lignes.

Soit r le rayon de l'angle d'incidence ou la perpendiculaire abaissée du sommet d'un plan sur le côté de sa base. Soit s le sinus, c le cosinus, m le bord terminal, L le côté de la base; enfin soit d la demi-diagonale de la base ou la ligne menée du centre de la base à un angle. Nous aurons $s = \frac{1}{2} L$ ou $L = 2s$.

$$r = \sqrt{s^2 + c^2}.$$

$$m = \sqrt{r^2 + \frac{1}{2}L^2} = \sqrt{2s^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{2} \times s$$

$$\text{l'axe} = 2c.$$

On voit que toutes les lignes principales de l'octaèdre sont exprimées d'une manière très-simple.

Angles li-
néaires.

Occupons-nous des angles, et d'abord des

angles linéaires. Dans la moitié de l'angle terminal ou l'angle au sommet, on a :

$$\sin : \cos :: \frac{1}{2} L : r :: s : \sqrt{s^2 + c^2}.$$

De là on peut conclure tous les autres angles linéaires.

Passons aux angles d'incidences. Nous avons dit que le rapport entre le sinus et le cosinus de l'angle d'incidence d'un plan à l'axe était $s : c$. Appelons cet angle i .

Angles
plans.

Il est évident que l'angle que forme un plan avec son opposé dans la même pyramide = $2i$, et que l'angle de ce même plan avec le plan adjacent dans l'autre pyramide = $180^\circ - 2i$.

Angle en-
tre deux
plans oppo-
sés au mê-
me som-
met.

On conçoit facilement que dans cet angle le sinus et le cosinus de la moitié sont entre eux $:: c : s$.

Angle en-
tre deux
plans adja-
cens dans
les deux py-
ramides.

Déterminons enfin l'angle entre deux plans adjacens dans une même pyramide, se coupant sur un bord terminal, il faut trouver le sinus, le cosinus, et le rayon de la moitié de cet angle. Nous suivrons une marche analogue à celle que nous avons employée pour les rhomboèdres.

Angle en-
tre deux
plans adja-
cens dans la
même pyra-
mide.

Soit ϵ le rayon ou la perpendiculaire abaissée du milieu de la base sur le bord terminal. Cette ligne partagera le triangle rectangle qui est la moitié du plan primitif entre deux autres triangles rectangles semblables au premier. On aura donc $m : r :: \frac{1}{2} L : \epsilon$ ou $m : r :: s : \epsilon$, donc $\epsilon = \frac{s \times r}{m}$, et

Le rayon.

substituant les valeurs de r et de m , $\epsilon = \frac{s \times \sqrt{s^2 + c^2}}{\sqrt{2s^2 + c^2}}$

$$\text{ou enfin, } \epsilon = \frac{\sqrt{s^4 + c^2 s^2}}{2s^2 + c^2}$$

Le sinus.

Soit σ le sinus; le rayon étant g , le sinus devra être la moitié de la demi-diagonale de la base, ou le quart de la diagonale entière; donc

$$\sigma = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times s = \sqrt{\frac{1}{2}} s.$$

Appelons μ et μ' les deux parties dans lesquelles le bord terminal m se trouve divisé par le rayon g . Nous aurons $\mu = \frac{(\frac{1}{2}l)^2}{m} = \frac{s^2}{\sqrt{2s^2+c^2}}$

$$\text{et } \mu' = \frac{r^2}{m} = \frac{s^2+c^2}{\sqrt{2s^2+c^2}}.$$

De même la demi-diagonale d est divisée en deux parties par le sinus σ , et ces parties sont égales; donc chacune $= \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} s$.

Le cosinus.

Soit maintenant χ le cosinus, nous avons deux moyens de la calculer, et l'un et l'autre doivent donner la même valeur, car le petit triangle rectangle composé des lignes μ , χ et $\frac{d}{2}$ χ étant semblable au grand triangle rectangle formé par les lignes d , c et m , on a cette proportion $m : c :: \frac{d}{2} : \chi$, d'où l'on tire cette équation :

$$\chi = \frac{c d}{2 m} = \frac{c \sqrt{2} s}{2 \sqrt{2 s^2 + c^2}} = \frac{c s}{\sqrt{4 s^2 + 2 c^2}}; \text{ si on avait pris}$$

cette autre proportion $d : c :: \mu : \chi$, on aurait eu $\chi = \frac{c \mu}{d} = \frac{c s^2}{\sqrt{2 s^2 + c^2} \times \sqrt{2} s} = \frac{c s}{\sqrt{4 s^2 + 2 c^2}}$ qui est la même valeur.

Rapport général.

$$\text{Donc } \sigma : \chi : g :: \sqrt{\frac{1}{2}} s : \frac{c s}{\sqrt{4 s^2 + 2 c^2}} : \frac{\sqrt{s^2 + c^2} s}{2 s^2 + c^2} :: \\ 1 : \frac{c}{\sqrt{2 s^2 + c^2}} : \sqrt{\frac{2 s^2 + 2 c^2}{2 s^2 + c^2}} :: \sqrt{2 s^2 + c^2} : c : \sqrt{2 s^2 + 2 c^2} :: m : c : \sqrt{2} r.$$

Si nos lecteurs se rappellent les expressions que nous avons déterminées pour les angles analogues dans les rhomboèdres et les dodécaèdres birhomboides, ils pourront remarquer ici, avec quelque intérêt, une propriété des octaèdres droits à base carrée, analogue à celle que nous avons trouvée pour ces autres formes; en effet, il résulte du calcul précédent, que dans ce genre d'octaèdres, le sinus et le cosinus de la moitié de l'angle d'incidence entre deux plans adjacens contigus au même sommet, sont entre eux, comme le bord terminal est à la moitié de l'axe, le rayon étant la perpendiculaire abaissée du sommet sur le côté de la base, multipliée par $\sqrt{2}$.

Nous continuerons l'examen des autres formes cristallines dans une suite de ce Mémoire que nous nous proposons de publier (1).

(1) Cette suite du Mémoire de M. Weiss paraîtra dans le prochain Numéro.

Nous y ajouterons une table des matières, et une table alphabétique des espèces minérales dont M. Weiss a déterminé le caractère géométrique principal.

Propriété de ces octaèdres analogues à celle des rhomboèdres.