

gent et en vermeil, ouvrages bien ciselés et montés avec un grand soin, ainsi que pour un bas-relief d'argent, exécuté en repoussé, lequel représente la GÈNE, et pour diverses pièces d'argenterie, le tout de la plus belle exécution,

Plaqué d'or
et
d'argent. *Relativement au PLAQUÉ D'OR et D'ARGENT:*

A MM. Levrat et Compagnie, rue de Popincourt, n^o. 66, à Paris,

Médaille d'argent, pour vaisselle de table, casseroles, plats, soupnières, flambeaux, réchauds, etc., ouvrages plaqués au vingtième de leur poids, et d'un prix modéré;

A M. Pillioud, rue des Juifs, n^o. 11, à Paris,

Médaille de bronze, pour vaisselle d'argent et autres objets plaqués avec beaucoup de soin, ouvrages dans lesquels la soudure en argent est la seule qui soit employée, comme étant préférable à la soudure ancienne, sous le rapport de la solidité;

A M. Cristophe, rue des Enfans-Rouges, n^o. 7, à Paris,

Idem, pour échantillon d'un plaqué exécuté à froid, qui paraît plus solide que le plaqué fait à chaud, et pour boutons en métal, d'un travail soigné;

A M. Tourrot, rue Sainte-Avoye, n^o. 47, à Paris,

Mention honorable, pour vaisselle et pour objets destinés à l'ornement des églises, ouvrages emboutis au tour;

A M. Chatelain et Compagnie, Faubourg du Temple, n^o. 91, à Paris,

Idem, pour casques, cuirasses, et ustensiles de table, le tout plaqué avec soin.

SUR LES ENGRENAGES;

PAR M. CLAPEYRON,

Élève ingénieur au Corps royal des Mines.

Le but que je me suis proposé, dans mes recherches à ce sujet, a été de déterminer la forme à donner aux dents d'engrenage pour rendre nul le frottement qu'elles exercent les unes sur les autres dans les machines ordinaires, inconvénient d'où résulte une perte de forces vives, inutilement employées à user les dents.

Il serait un peu long d'exposer la méthode analytique qui m'a conduit au résultat que j'expose; une démonstration synthétique me conduira plus rapidement au but.

Soient, Pl. II, *fig. (1)*, A, C, B, D, les foyers de deux ellipses égales, placées l'une à côté de l'autre, de manière à ce qu'elles se touchent par l'extrémité de leur grand axe en *m*.

Supposons que l'une des ellipses A C étant fixe, l'autre B D roule sur la première. Si je démontre que l'épicycloïde décrite par le foyer B de l'ellipse mobile est un cercle, ayant le foyer A pour centre et la distance A B pour rayon, il s'ensuivra que, si l'on suppose les points A et B fixes dans les deux ellipses, et qu'on les rende

mobiles, la première autour du point A, la seconde autour du point B, l'ellipse BD communiquera son mouvement à l'ellipse AC sans qu'il y ait aucun frottement exercé sur les surfaces de contact.

Or, soit D'B' une position quelconque de l'ellipse BD dans le mouvement que nous lui avons supposé autour de l'ellipse AC, supposée fixe, je dis que la distance $AB' = AB$.

En effet, l'ellipse mobile ayant roulé sur l'ellipse fixe $RS = Rm$ et par conséquent $RB' = RC$, puisque les ellipses sont égales, par la même raison, les angles des rayons vecteurs B'R et CR avec la tangente commune Pq seront égaux; et comme dans une ellipse les angles PRA et CRq sont égaux, il s'ensuit que $PRA = B'Rq$, conséquemment les points A, R, B' sont en ligne droite, et comme $AR + RB = AR + RC = AB$, il s'ensuit que $AB' = AB$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de conclure de là, que si l'on veut faire communiquer le mouvement d'une roue à une roue extérieure, sans frottement, il faudra les armer de dents terminées par des arcs égaux d'ellipses égales ayant pour grand axe la distance des centres et un petit axe arbitraire.

Je vais maintenant démontrer que pour communiquer le mouvement d'une roue à une roue intérieure, la forme des dents doit être hyperbolique; il suffira pour cela de démontrer pour les hyperboles une proposition analogue à celle que nous venons de démontrer pour les ellipses. C'est que si deux branches d'hyperboles égales A et B se touchent par leur sommet *m*, fig. (2),

qu'on suppose l'une d'elles B fixe et qu'on fasse rouler la seconde (A) sur la première (B), la courbe décrite par le foyer R de l'hyperbole mobile sera un cercle ayant son centre au foyer T de l'hyperbole fixe. Soit en effet *z* la position primitive du foyer de l'hyperbole mobile, soit A' une de ses positions quelconques, comme les hyperboles sont égales et ont roulé l'une sur l'autre, on en conclura également que $qR = Pq$, et que les points T, R, q, sont en lignes droites, par conséquent $RT = qT - Pq = \text{constante}$, puisque la courbe (B) est une hyperbole.

L'épicycloïde décrite par le point R étant un cercle ayant son centre en T, il en résulte évidemment que si on suppose l'hyperbole (A) mobile autour de son foyer *z*, et l'hyperbole (B) mobile autour de son foyer T, en faisant tourner la première (A) autour du foyer *z*, elle fera tourner la seconde (B) autour du foyer T, sans qu'il y ait de frottement. On voit donc que pour communiquer le mouvement d'une roue à une roue intérieure, il faut armer leur circonférence de dents terminées par des arcs égaux d'hyperboles égales ayant pour grand axe la distance des centres.

Dans le cas où la roue extérieure aurait un rayon infini, les arcs hyperboliques deviendraient paraboliques et la roue extérieure deviendrait une tige douée d'un mouvement de translation.

Il suit de là (et on pourrait le démontrer directement), que pour communiquer le mouvement d'une roue à une tige, il faut armer leur surface de dents paraboliques.

Des engrenages coniques.

Soient AC et AB, *fig.* (3), les axes de deux cônes ayant leur sommet commun en A, et mobiles chacun autour de leur axe; on veut communiquer le mouvement de l'un à l'autre au moyen de dents d'engrenage: quelle est la forme à donner aux surfaces de ces dents pour rendre nul le frottement qu'elles exercent les unes contre les autres dans les roues ordinaires?

Les dents doivent avoir la forme d'un cône ayant son sommet en A et ayant pour base une courbe analogue à l'ellipse tracée sur une sphère ayant aussi son centre en A.

Avant de passer à la démonstration, nous allons déterminer la nature de cette courbe et établir une propriété qu'elle partage avec l'ellipse et dont nous tirerons parti.

Soit A, *fig.* (4), le centre d'une sphère, B et C, deux points quelconques pris sur sa surface.

La courbe EmnD est déterminée de manière à ce que, si par un point quelconque m de cette courbe on mène un rayon au centre A, et qu'on joigne également les points B et C au point A, la somme des angles mAB et mAC soit constante; alors il est facile de voir que la somme des arcs de grands cercles Bm et mC, qui mesure ces angles, est constante, d'où résulte un moyen mécanique de décrire cette courbe; il suffit pour cela de fixer les deux extrémités d'un fil lâche en deux points B et C et de le tendre au moyen d'une pointe sur la surface de la sphère, alors le fil se courbera naturellement suivant

deux arcs de grands cercles Bm et mC, et la pointe décrira la courbe dont je parle.

D'après cela, soient m et n, deux points infiniment voisins qui déterminent la direction de la tangente Pq. Je dis que dans cette courbe ainsi que dans l'ellipse, les angles formés par la tangente mn et les deux rayons vecteurs qui correspondent au point de contact, sont égaux en effet, soient menés les rayons vecteurs curvilignes correspondans aux deux points m et n, et de ces deux points abaissons des arcs infiniment petits mR en ms perpendiculaires aux rayons vecteurs RB et nC. Les points m et n étant infiniment voisins, les constructions que nous venons de faire détermineront dans l'élément du plan tangent en m et n deux triangles rectangles nRm et nsm, qui sont égaux, comme ayant un angle droit égal, un côté nm commun et le côté nR = ns. En effet, nR est la variation infiniment petite de l'arc de grand cercle mB que je nomme z, ns est également celle de l'arc de grand cercle mC que je nomme z'; or, comme z + z' = constante, d'où dz = - dz', il s'ensuit que les deux variations nR et nS sont égales numériquement, d'où l'on conclut que les deux triangles infiniment petits sont égaux, donc les angles mnR et mnC sont égaux; or, comme les points m et n coïncident, il s'ensuit que les angles Cnq et Cm q coïncident ainsi que les angles PnB et PmB, donc la tangente Pq forme des angles égaux avec les rayons vecteurs qui correspondent au point de contact.

D'après cette propriété, il est aisé de voir que

si l'on imagine deux de ces courbes égales disposées sur la surface d'une sphère de manière à ce qu'elles se touchent par le sommet de leur grand axe, si l'on fait rouler l'une de ces courbes sur l'autre supposée fixe sans que la courbe mobile sorte de la surface de la sphère, si D, C, A, B , *fig. (5)*, représentent les foyers de ces courbes, le foyer A restera à une distance constante du point D , comptée sur un grand cercle; et par conséquent, que le rayon de sphère passant par le point A , décrira un cône droit autour du rayon passant par le foyer D .

La démonstration étant absolument la même que celle que j'ai donnée pour l'ellipse, je me dispenserai de la répéter.

On peut également décrire sur la surface de la sphère des courbes analogues aux hyperboles. On démontrerait également, pour ces nouvelles courbes, que la tangente partage en deux parties égales l'angle que font entre eux les rayons vecteurs, qui correspondent au point de contact.

On conclura de là, par une suite de raisonnemens analogues à ceux que j'ai faits pour les hyperboles planes, que si l'on trace sur la surface d'une sphère deux des courbes dont je parle (1) et (2), se touchant par leur sommet et servant de base à deux cônes ayant leur sommet au centre de la sphère, si ce sommet des deux cônes, restant toujours le même, on fait rouler le cône (2), *fig. (6)*, sur le cône (1), la ligne qui passe par le sommet et par le foyer F de la courbe mobile, décrira autour du rayon qui passe par

le foyer F' de la courbe fixe, un cône droit, ayant ce rayon pour axe.

Il résulte de là, que lorsque l'on veut communiquer le mouvement d'une roue à une autre, qui a avec la première une tangente commune, mais qui n'est pas dans le même plan, il faut armer leur surface de dents terminées par des portions de surface conique, ayant pour sommet le point où se rencontrent les axes des roues, et pour base des courbes analogues à l'ellipse ou à l'hyperbole, et tracées sur la surface de la sphère qui passe par les deux cercles donnés; analogues à l'ellipse dans le cas où les deux roues sont extérieures, analogues à l'hyperbole dans le cas où elles sont intérieures l'une à l'autre.

On voit, d'après ce qui précède, que le grand axe, soit de l'ellipse, soit de l'hyperbole, est déterminé quand on connaît la distance des centres; mais le contour des dents ne doit être formé que d'une portion de ces courbes: le choix de cet arc dépend du rapport que l'on veut établir entre la puissance et la résistance.

Ainsi, soient A et B , *fig. (7)*, les centres de deux roues dont la première est la roue motrice, CE et DE , les portions égales d'ellipse qui doivent déterminer les dents, il est évident que le rapport de la puissance à la résistance, sera le rapport inverse des angles CAE et DBE ; mais les roues devant avoir un nombre déterminé de dents, les angles CAE et DBE seront contenus un nombre exact de fois dans la circonférence. Cette condition détermine leur grandeur. La question se réduit donc à déterminer, sur une ellipse DE , deux points D et F , tels que les angles

DBE et CAE ou son égal DFE, formés par les rayons vecteurs qui y correspondent, soient égaux à des angles donnés.

Pour résoudre ce problème, nous allons démontrer pour l'ellipse dont il s'agit, une propriété que nous mettrons à profit.

Soit $BD = z$, $DF = z'$, $DBF = u$, $DFM = u'$, soit m un point infiniment voisin du point D. Si de ces deux points on abaisse les perpendiculaires DP et mn sur les rayons vecteurs DF et mB , les triangles DPm et Dnm qui résulteront de cette construction, seront égaux, et on aura :

$$Dp = mn, \text{ ou } z du = z' du', \text{ d'où } \frac{du}{z'} = \frac{du'}{z}$$

et comme $\frac{z'}{z} = \frac{\sin. u}{\sin. u'}$, il en résulte,

$$(1) \frac{du}{\sin. u} = \frac{du'}{\sin. u'}$$

Intégrons cette équation; il faut pour cela faire les transformations suivantes :

$$\frac{du}{\sin. u} = \frac{2 \left(\sin.^2 \left(\frac{u}{2} \right) + \cos.^2 \left(\frac{u}{2} \right) \right) d \left(\frac{u}{2} \right)}{2 \sin. \left(\frac{u}{2} \right) \cos. \left(\frac{u}{2} \right)}$$

$$\text{d'où } \int \frac{du}{\sin. u} = 2 \int \frac{\sin. \left(\frac{u}{2} \right) d \left(\frac{u}{2} \right)}{2 \cos. \left(\frac{u}{2} \right)}$$

$$+ 2 \int \frac{\cos. \frac{u}{2} d \left(\frac{u}{2} \right)}{2 \sin. \frac{u}{2}} + \text{cons.}$$

$$= - \log. \cos. \frac{u}{2} + \log. \sin. \frac{u}{2} = \log. \text{tang. } \frac{u}{2}$$

+ cons.

Intégrant de même le second membre de l'équation (1), il vient :

$$\log. \text{tang. } \frac{u}{2} = \log. \text{tang. } \frac{u'}{2} + \text{cons.}, \text{ d'où}$$

$$\log. \left(\frac{\text{tang. } \frac{u}{2}}{\text{tang. } \frac{u'}{2}} \right) = \text{cons.},$$

$$\text{et enfin (2) } \frac{\text{tang. } \left(\frac{u}{2} \right)}{\text{tang. } \frac{u'}{2}} = \text{cons.}$$

Ce qui démontre pour l'ellipse cette nouvelle propriété que le rapport des tangentes de la moitié des angles EBM et EFM que forment deux rayons vecteurs EB et EF avec l'axe BM, est constant, la valeur de cette constante se dé-

duit facilement de la connaissance des axes de la courbe.

D'après cela, soient v et v' les angles EBM et

EFM, on aura de même (3) $\frac{\text{tang.} \left(\frac{v}{2}\right)}{\text{tang.} \left(\frac{v'}{2}\right)} = \text{cons.}$

Si donc on veut déterminer les angles u, u', v, v' , de manière à ce que les angles DBE et DFE soient égaux à des quantités données m et n , il faudra joindre aux équations (2) et (3) les deux autres :

$$u - v = m \text{ et } u' - v' = n.$$

On est conduit par l'élimination à des équations du second degré dont on tire les valeurs des tangentes des angles u, v, u' et v' ; mais cette méthode est peu praticable, parce qu'elle exige des calculs assez longs. La construction géométrique que je vais donner sera sans doute préférée.

Soit M, *fig.* (8), un point quelconque d'une ellipse, dont F et F' sont les foyers. Si par ces points on mène deux lignes FN et F'N, de manière à partager en deux parties égales les angles MFP et MF'P, elles se rencontreront en un point N. Si par ce point on abaisse une perpendicu-

laire NP sur le grand axe prolongé ou non $\frac{NP}{FP}$

et $\frac{NP}{F'P}$, seront les tangentes des angles NFP et

NF'P, et comme nous avons démontré que le rapport de ces tangentes est constant, il s'ensuit que le rapport des lignes EP et F'P, est aussi constant. Le pied P de la perpendiculaire abaissée du point N ayant une position indépendante de celle du point M, il s'ensuit que le lieu des intersections des lignes qui partagent en deux parties égales les angles formés par les rayons vecteurs et le grand axe, est une ligne droite perpendiculaire à cet axe.

Et réciproquement, si on trace deux lignes NP et EP à angle droit, si on prend sur l'une d'elles deux points F et F', si on joint un point N de la ligne NP aux points F et F' et que par ces points on mène des droites FM et F'M de manière à doubler les angles NFP et NF'P, le lieu M de l'intersection de ces lignes sera une ellipse ayant les points F et F' pour foyers.

Si on effectue la même construction pour un autre point Q on aura un autre point R de l'ellipse, et il est aisé de voir que les angles RFM et RF'M seront doubles des angles QFN et QF'N.

Supposons d'après cela que l'on veuille construire un système de roues propre à faire varier la force motrice dans un rapport donné, nous avons vu comment on déduira de cette condition la valeur des angles RFM et RF'M que doivent

sous-tendre les arcs d'ellipse qui terminent les dents. On prendra sur la ligne QP deux points Q et N sur lesquels on construira deux segments de cercle, capables l'un de la moitié de l'angle RFM, l'autre de la moitié de l'angle RF'M. On coupera ces deux cercles par une ligne FP perpendiculaire à la première; on joindra les points d'intersection F et F' aux points Q et N; on formera ainsi deux angles QFN et QF'N égaux à la moitié des angles donnés. Si alors on double les angles NF'P, QF'P, NFP, QFP, ces lignes résultant de cette construction se couperont, deux à deux, en deux points R et M qui seront les extrémités des arcs d'ellipse qui forment les dents. La distance des centres sera égale à $FR + RF' = FM + MF'$.

La même question se résoudrait aussi également pour les roues à dents hyperboliques et paraboliques. Quant aux roues d'angle, la solution du même problème exige les secours de la géométrie descriptive, et on y parvient par des procédés analogues à ceux que j'ai indiqués pour les roues ordinaires.

Si l'on veut appliquer les principes que je viens de donner à la construction des roues d'engrenage, on est arrêté par plusieurs difficultés. En effet, soient A et B, *fig. (9)*, les centres de deux roues, d'après ce qui a été démontré plus haut, le point de contact des roues se trouvera constamment sur la ligne des centres, en sorte que l'extrémité D d'une dent doit se trouver avec l'origine c d'une autre dent cF. Il résulterait de là, pour chaque dent, une forme beaucoup trop allongée, qui compromettrait leur solidité.

Ce motif, joint à la nécessité de disposer les dents de manière à ce que le mouvement puisse se faire indifféremment dans un sens ou dans un autre, m'a fait penser qu'il fallait partager l'épaisseur de la roue en deux parties égales, et armer chacune d'elles de dents de la forme EDGH, de manière, toutefois, à ce que dans la rangée inférieure, l'origine c d'une dent cF, correspondît à l'extrémité D d'une dent ED de la rangée supérieure.

Un système de dents de ce genre pourrait, je pense, suffire dans beaucoup de cas; mais si les pressions que les dents ont à supporter étaient trop considérables, il serait à craindre que les extrémités pointues ne se déformassent; il s'établirait alors des frottemens et le mal empirerait. Peut-être alors faudrait-il altérer un peu la forme des extrémités des dents, de manière à les terminer par des parties obtuses, ou bien il faudrait ajouter un autre système de dents, placé par rapport au premier, de manière à permettre de remplacer les angles (D, F, H,) (E, c, G,) par des parties obtuses; les dents auraient alors la forme EDFL, et l'une serait séparée de l'autre d'une quantité égale à LM, en sorte que la forme de l'une des tranches de la roue serait EDFLM, et on placerait quatre tranchées égales à celles-ci, les unes au-dessous des autres, de manière que projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, elles présentassent la figure (9) FD.

Comparons maintenant une roue construite, ainsi que je le propose, à une roue telle qu'on les construit ordinairement; dans celles-ci, la

gorge ou l'origine de la dent étant étranglée, comme on le voit, *fig.* (10), puisqu'elle est formée de deux plans diamétraux, la rupture tend à se faire à l'origine de la dent en *ab*, et par conséquent, la force qui tend à rompre, agit au bout d'un levier égal à la distance du point *a* au point où la courbe *cd* touche l'autre roue.

Inconvénient que l'on ne peut reprocher aux dents que je propose, puisque celles-ci vont en s'élargissant de la circonférence au centre.

D'ailleurs (indépendamment de ce qui précède), à nombre égal de dents, celles que je propose étant réparties sur quatre anneaux concentriques, ont une base environ quatre fois plus large, et par conséquent, à épaisseur égale, doivent opposer à la rupture une résistance quatre fois plus grande, et une résistance égale, pour une largeur quatre fois plus petite. D'où l'on pourrait conclure que les engrenages que je propose, quoiqu'exigeant quatre rangées de dents, ne coûteraient pas davantage que ceux que l'on emploie ordinairement; mais quand cela ne serait pas, une légère augmentation dans la dépense première serait, je crois, rachetée par l'avantage de ne rien perdre de la force motrice, et par le long service qu'elles permettent, puisque n'étant soumises à aucun frottement et à aucun choc, elles ne doivent pas plus s'user qu'un cylindre pesant n'userait un plan fixe sur lequel il roulerait.

Dans la théorie des engrenages, que l'on donne dans les cours de mécanique, on détermine la courbure des dents par la condition que l'effort à exercer par le moteur soit constant, ou

que pour une vitesse constante de la roue motrice, la vitesse de la roue mue fût aussi constante; ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre, en vertu du principe des vitesses virtuelles. Or, on démontre aisément que pour que ces conditions soient remplies, le point de contact des deux dents, dont l'une pousse l'autre, doit avoir lieu hors de la ligne des centres, tandis que la condition à remplir, pour que le frottement soit nul, est que le point de contact se trouve constamment sur la ligne des centres. Ces deux conditions s'excluent donc l'une sur l'autre; mais, quelle est la plus importante des deux?

Or, le principe unique qui doit guider dans la construction des machines, principe qui renferme tous les autres, est qu'il n'y ait dans les communications de mouvement, aucune perte de forces vives: or, la mécanique nous apprend que la somme des forces vives reste constante, tant qu'il n'y a ni chocs, ni frottemens. Quelles que soient d'ailleurs les variations de la vitesse, j'ai donc dû m'attacher à faire disparaître les chocs et les frottemens, et je crois avoir atteint ce but en ce qui concerne les engrenages.

Ainsi, soit *BC*, *fig.* (11), une dent d'une roue motrice ayant son centre en *A*, soit *B'* le centre de la roue, mise en mouvement, la force motrice agit au bout d'un levier qui varie depuis *AB* jusqu'à *AC*, et la résistance au bout d'un levier qui varie depuis *B'F* jusqu'à *B'C*; donc, si la vitesse angulaire de la roue *A* reste à-peu-près constante, la vitesse de roue *B'* ira en augmentant, jusqu'à ce que l'extrémité de la courbe *BC*

coïncide avec l'origine de la courbe FC. Cette augmentation de vitesse de la roue B'n'a pu avoir lieu sans une perte de force vive de la part du moteur ; mais dans l'instant suivant, la roue B', en vertu de l'excès de vitesse qu'elle a acquise , presse, par un des points de la courbe CG sur le point correspondant de la courbe CH, jusqu'à ce qu'elle ait rendu au moteur toute la force vive qu'elle lui avait empruntée.

EXAMEN

DU

FER FORGÉ PAR LES NÈGRES

DU FOUTA DIALLO

(HAUT-SÉNÉGAL),

ET

DES MINÉRAIS DESQUELS ILS LE RETIRENT;

PAR M. P. BERTHIER,

INGÉNIEUR AU CORPS ROYAL DES MINES (1).

LES échantillons de fer et de minerai qui ont été examinés, ont été rapportés par M. Mollien, qui les a recueillis lui-même sur les lieux, et ils ont été remis au laboratoire de l'École royale des Mines, par M. Brongniart.

Il y avait deux échantillons de fer ; l'un, grossièrement martelé, paraissait provenir d'un masseau ; l'autre était étiré en barre méplate de quelques centimètres de largeur et de quelques millimètres d'épaisseur.

Le fragment de masseau était très-poreux et rempli de gerçures, et néanmoins fort te-

(1) Extrait du *Voyage dans l'intérieur de l'Afrique*, fait en 1818, par G. Mollien.